Señales y Sistemas II

Módulo IV: La Teoría de Muestreo

1.- Representación discreta de señales continuas

2.- Muestreo, reconstrucción y aliasing

3.- Consideraciones prácticas sobre el muestreo

4.- Cambio del período de muestreo

1.- Representación discreta de señales continuas

2.- Muestreo, reconstrucción y aliasing

3.- Consideraciones prácticas sobre el muestreo

4.- Cambio del período de muestreo

¿ Será posible representar una señal continua mediante una señal discreta sin perder información?

Sin perder información = la señal continua original puede ser recuperada exactamente a partir de la señal discreta

¿ Será posible representar una señal continua mediante una señal discreta sin perder información?

Sin perder información = la señal continua original puede ser recuperada exactamente a partir de la señal discreta

Pareciera que sí, pues:

LA SERIE DE FOURIER ES UNA REPRESENTACIÓN DISCRETA DE UNA SEÑAL CONTINUA !!!

En las próximas láminas desarrollaremos una aproximación intuitiva al teorema de muestreo, en la que veremos bajo que condiciones es posible representar una señal continua a través de sus muestras sin perder información alguna.

Consideremos una señal periódica *f(x)* con período *2W*, cuya representación en serie de Fourier está dada por:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g[n]\, e^{-j\frac{2\pi n x}{2W}}$$

donde *g[n]* son los coeficientes de la serie de Fourier y están dados por la fórmula de análisis:

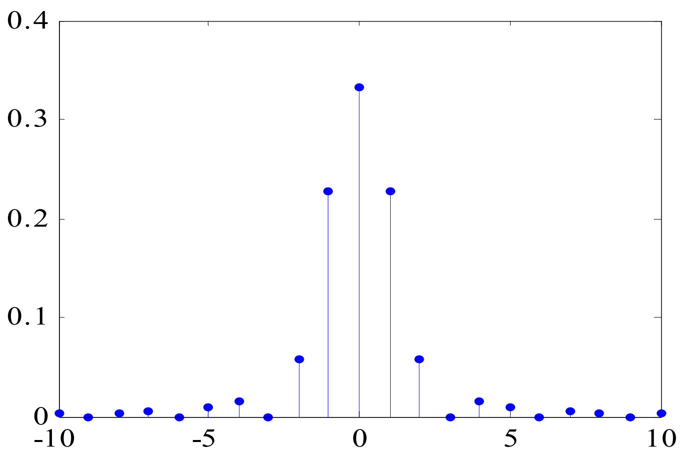
$$g[n] = \frac{1}{2W} \int_{-W}^{W} f(x)\, e^{j\frac{2\pi n x}{2W}}\, dx$$

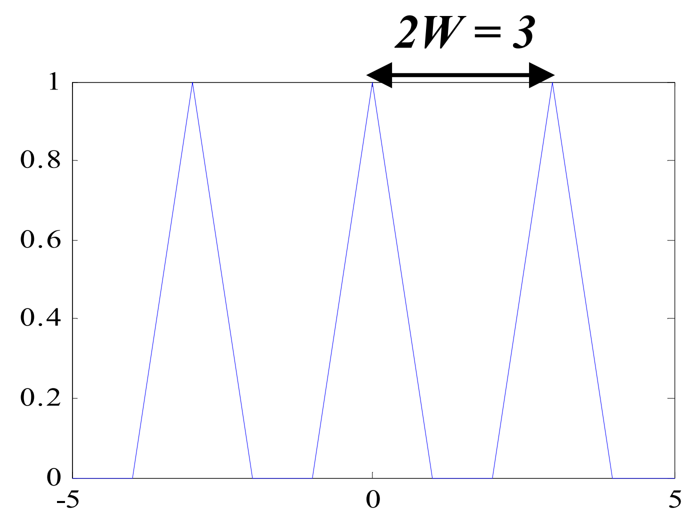
Ejemplo de señal periódica y su CTFS

Como ejemplo podemos proponer:

$$g[n] = \begin{cases} \dfrac{3/2}{(\pi n)^2}\,[1 - \cos(2/3\ \pi n)], & \text{si } n \neq 0 \\ 1/3, & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} T_1(x - 3k)$$





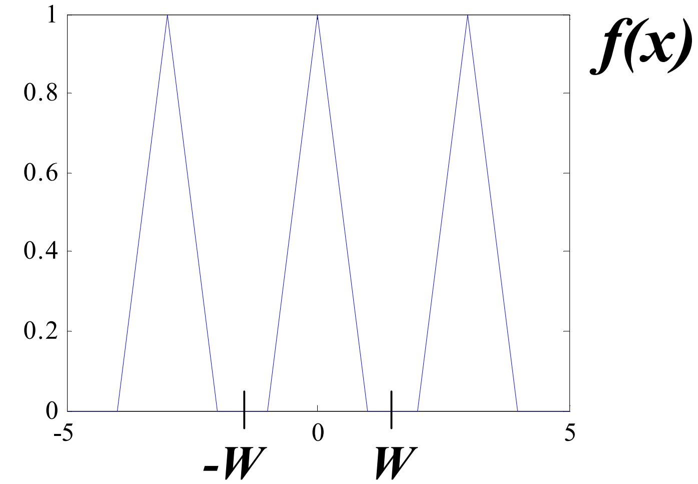
Consideremos ahora una señal continua no periódica *r(y)* con transformada de Fourier *R(x)*, de modo que *r(y)* y *R(x)* están relacionadas a través de la fórmula de síntesis:

$$r(y) = \int_{-\infty}^{\infty} R(x)\, e^{j\,2\pi x y}\, dx$$

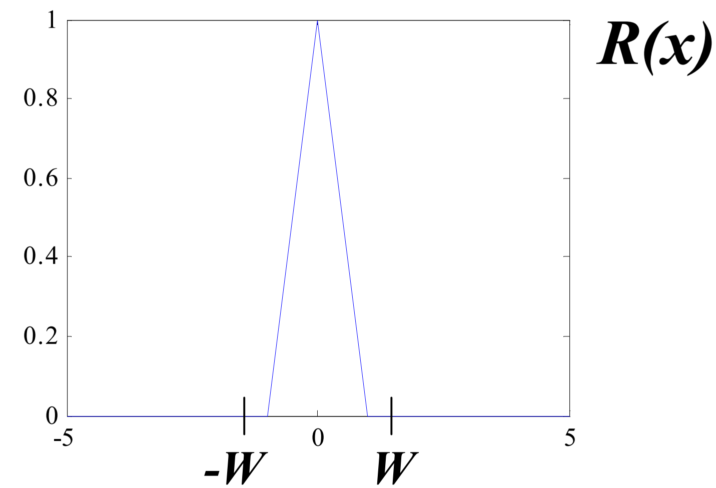
Donde podemos proponer: $R(x) = T_1(x)$

Versión periódica de una señal finita

De manera que *R(x)* coincide con un período de la señal *f(x)* previamente definida.



$$R(x) = \begin{cases} f(x), & si\ \ -W \leq n \leq W \\ 0, & en\ el\ resto \end{cases}$$



En nuestro ejemplo *W = 3/2*

De esta forma, *r(y)* está relacionada con *f(x)* mediante la siguiente expresión:

$$r(y) = \int_{-\infty}^{\infty} R(x)\, e^{j\,2\pi x y}\, dx = \int_{-W}^{W} f(x)\, e^{j\,2\pi x y}\, dx$$

Y si tomamos muestras de *r(y)* para los valores de $y = n/2W$ tenemos que:

$$r[n] = r(n/2W) = \int_{-W}^{W} f(x)\, e^{j\frac{2\pi n x}{2W}}\, dx$$

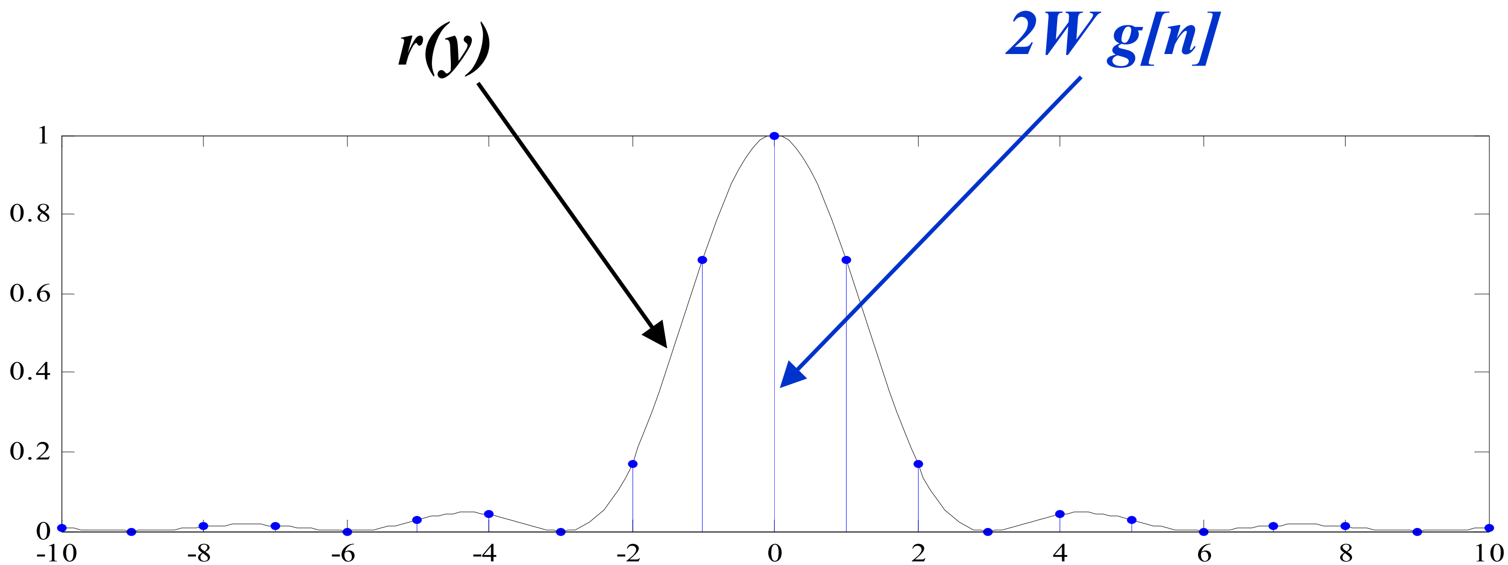
Donde finalmente, comparando *g[n]* con *r[n] = r(n/2W)*

$$g[n] = \frac{1}{2W} \int_{-W}^{W} f(x)\, e^{j\frac{2\pi n x}{2W}}\, dx$$

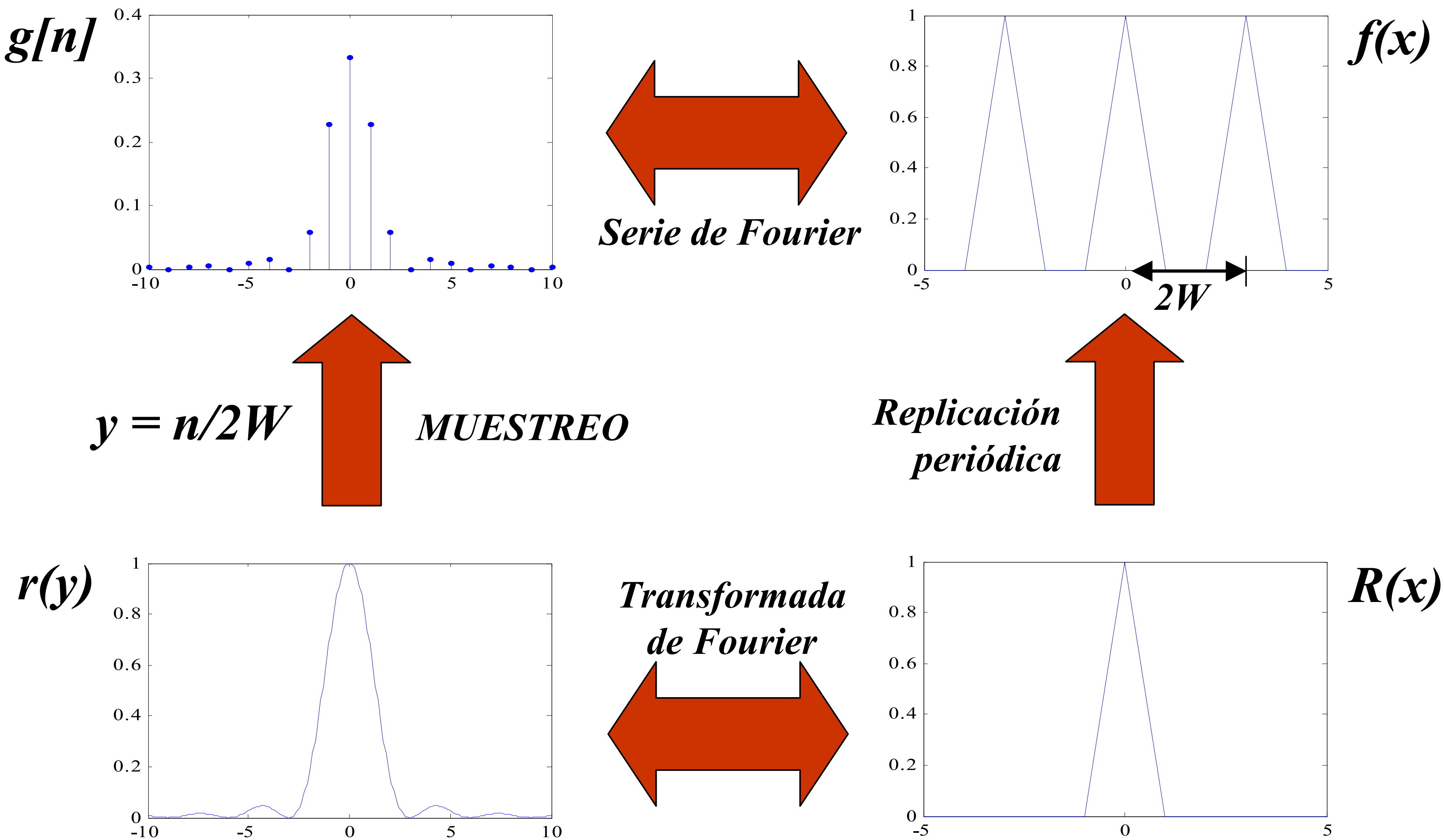
$$r[n] = r(n/2W) = \int_{-W}^{W} f(x)\, e^{j\frac{2\pi n x}{2W}}\, dx$$

se hace evidente que: $\boxed{2W\, g[n] = r(n/2W)}$

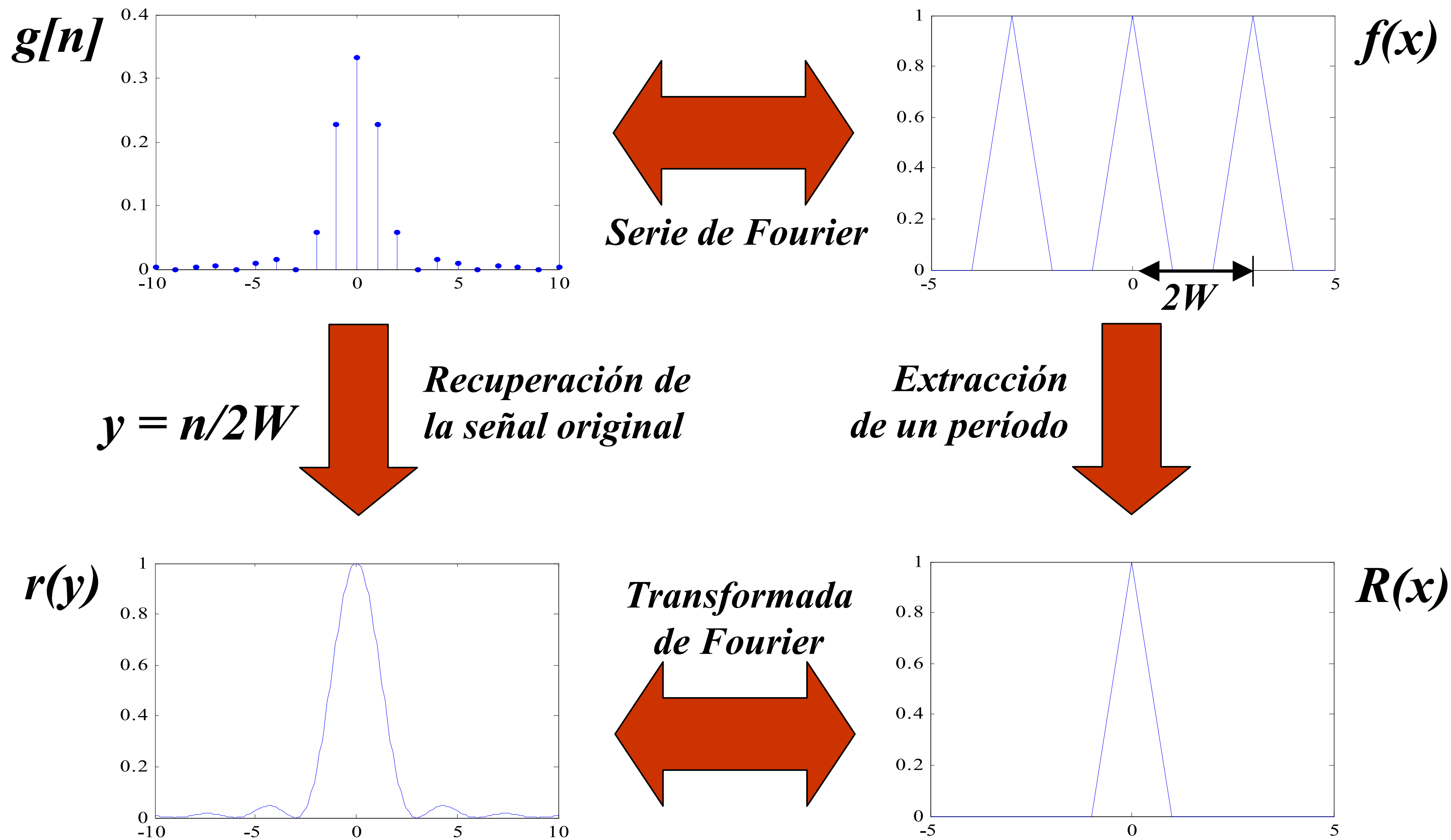
Es decir, los coeficientes *g[n]* corresponden a muestras de señal *r(y)* escalados por un factor de *2W*.



Muestreo y su efecto sobre la CTFT

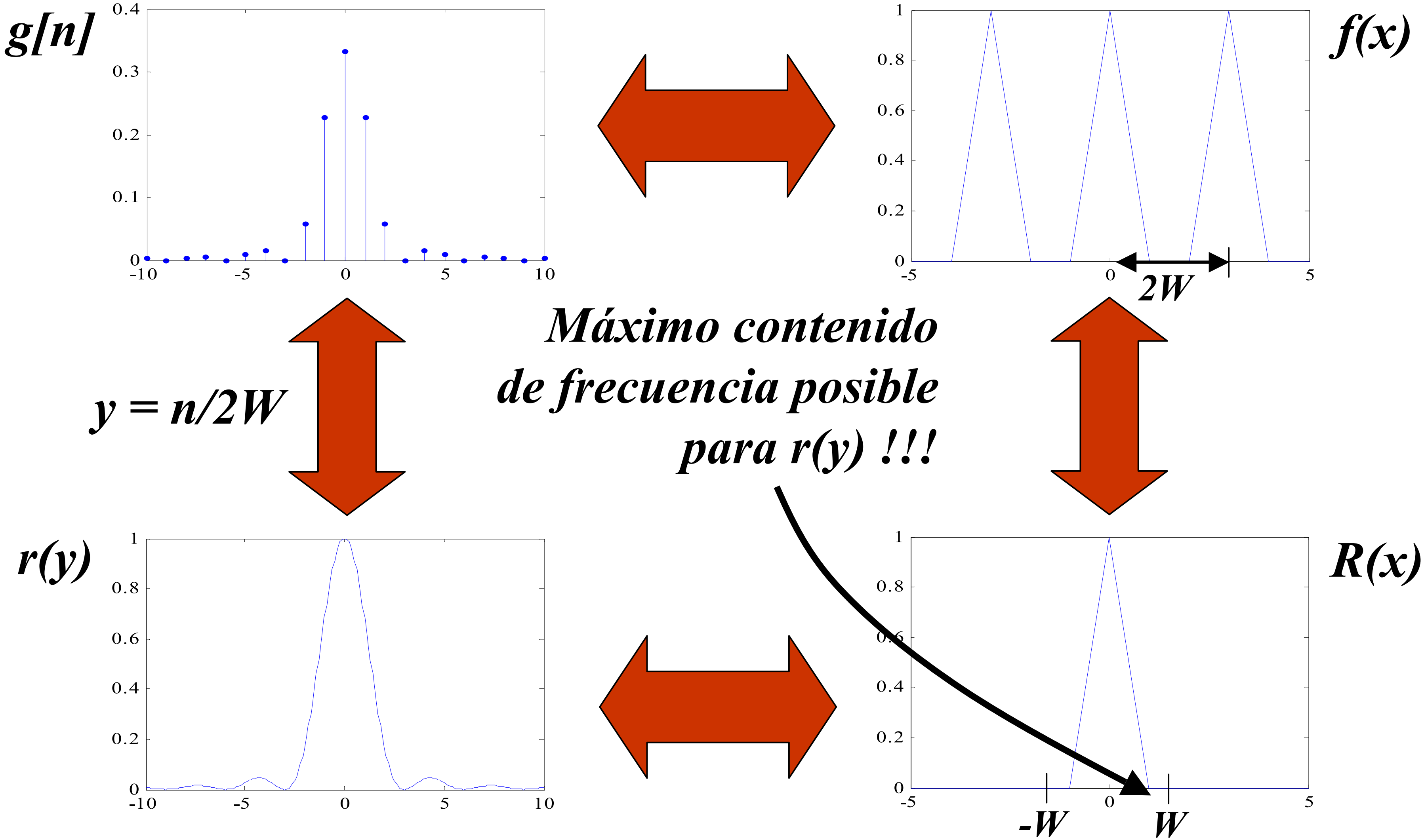


Recuperación de la señal continua



De donde podemos concluir que, debido a que existe una correspondencia única entre la señal *r(y)* y su transformada de Fourier *R(x)*, y entre la señal *f(x)* y los coeficientes de su serie de Fourier *g[n]*; entonces seremos capaces de recuperar *r(y)* a partir de sus muestras *2W g[n]* si, y sólo si, somos capaces de obtener *R(x)* a partir de *f(x)*.

Condición para la recuperación

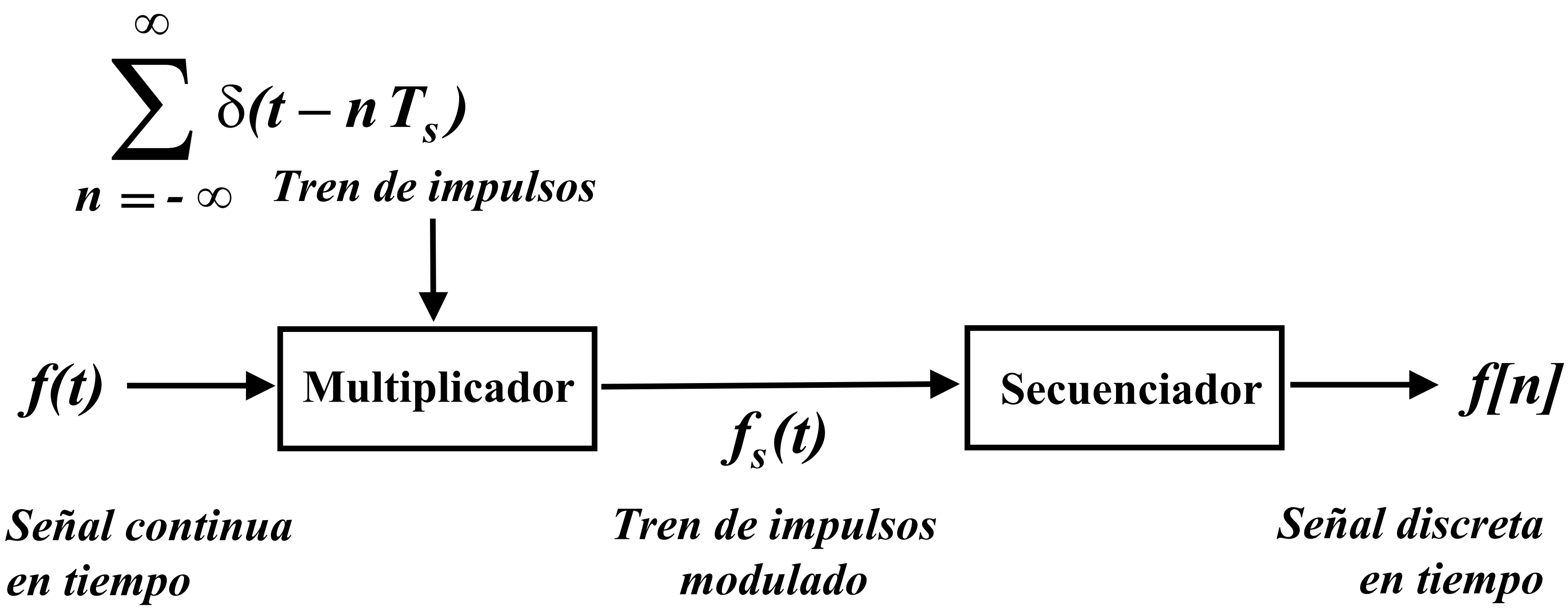


Postulado del teorema de muestreo

"Una señal con contenido de frecuencia máximo *W*, puede ser muestreada con una frecuencia mayor o igual a *2W* sin perder información alguna."

Este teorema es el resultado de los aportes de H. Nyquist y de C. E. Shannon a las teorías de la comunicación y de la información, y es comúnmente conocido como el teorema de muestreo de Nyquist-Shannon.

El modelo matemático de un muestreador ideal, o *sampler*, está definido de acuerdo con el siguiente sistema:



De acuerdo con el modelo presentado, el proceso de muestreo puede verse en el dominio del tiempo en dos pasos:

1.- Multiplicación por un tren de impulsos:

$$f_s(t) = f(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\,T_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\,T_s)\ \delta(t - n\,T_s)$$

2.- Secuenciación: $f[n] = f(n\,T_s)$. Como se puede observar, en este segundo paso la variable tiempo es normalizada por el valor del período de muestreo T_s.

Estos dos pasos pueden verse en el dominio de la frecuencia de la siguiente forma:

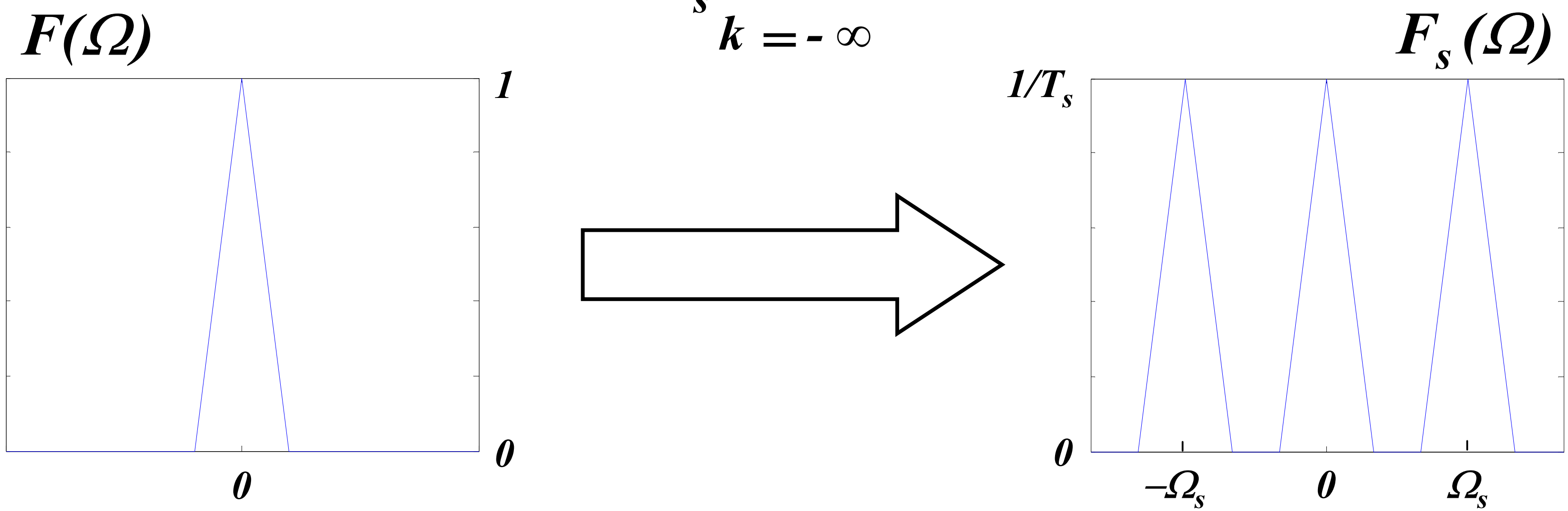
1.- La multiplicación de *f(t)* por un tren de impulsos, corresponde a la convolución de la transformada *F(Ω)* con otro tren de impulsos:

$$F_s(\Omega) = F(\Omega) * \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(\Omega - k\Omega_s)$$

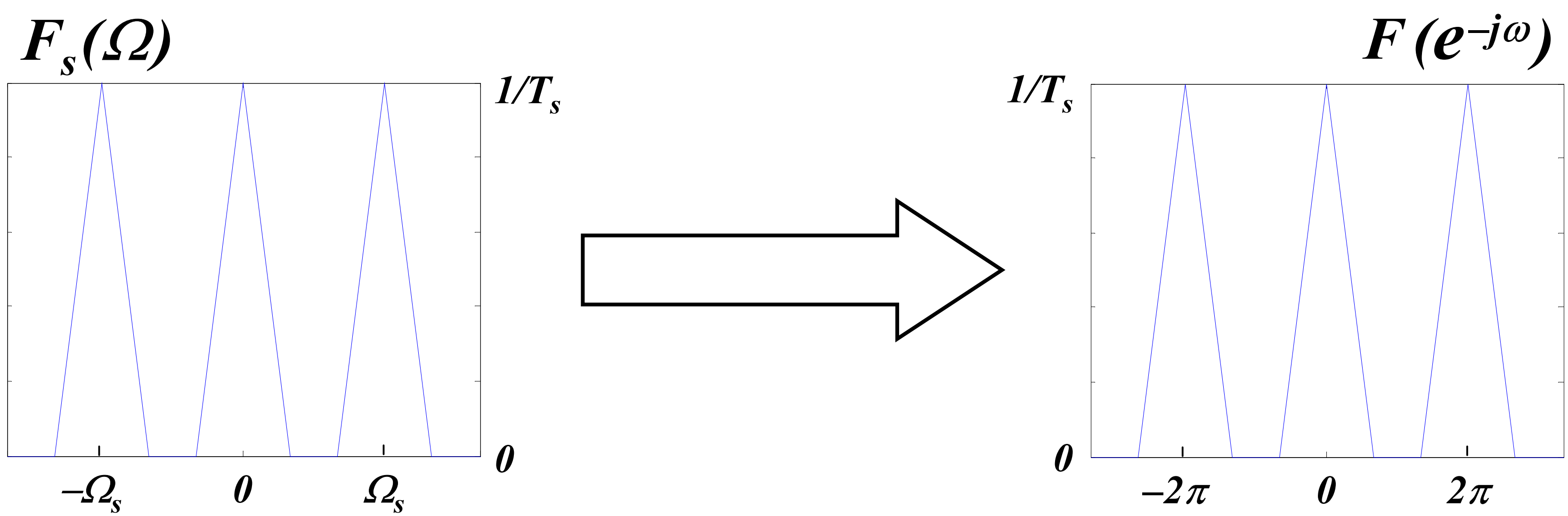
Donde Ω es la frecuencia angular de tiempo continuo $\Omega = 2\pi/t$ y Ω_s es la frecuencia angular de muestreo $\Omega_s = 2\pi/T_s$.

En donde se hace evidente que el espectro del tren de impulsos modulado $f_s(t)$ está compuesto de infinitas réplicas escaladas del espectro de la señal original $f(t)$:

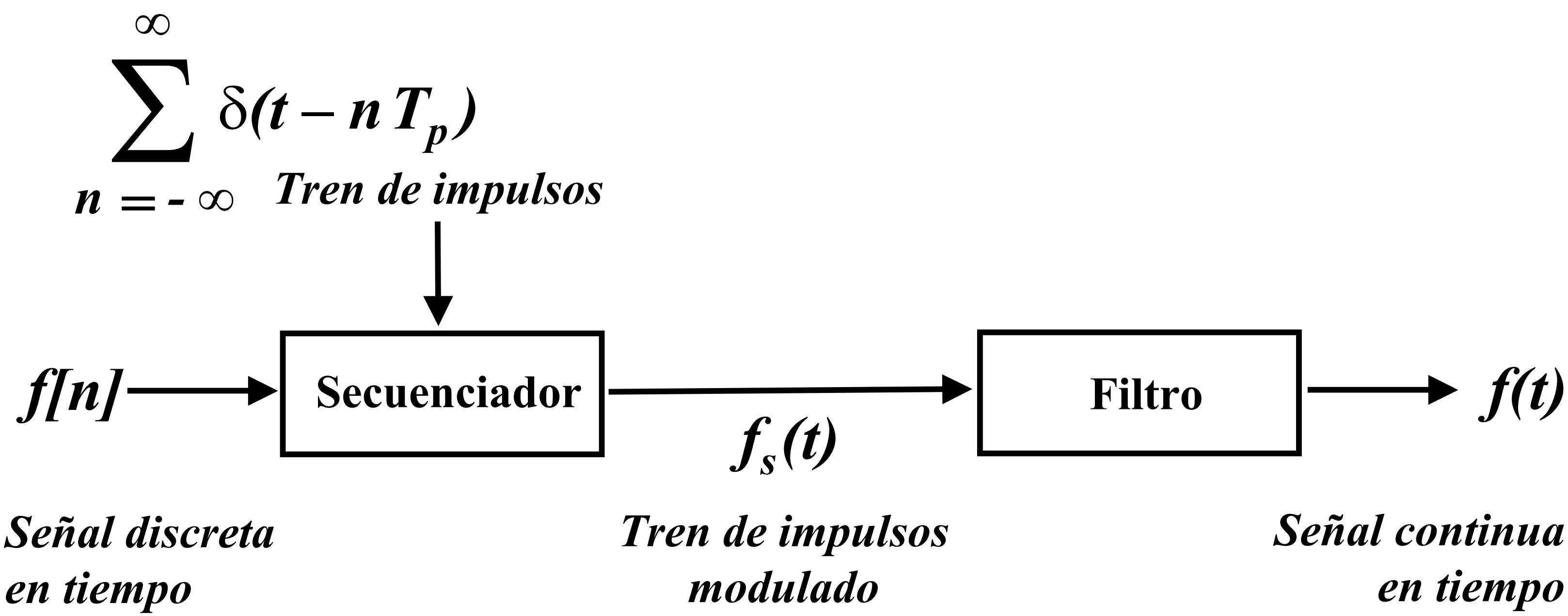
$$F_s(\Omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(\Omega - k\,\Omega_s)$$



2.- La normalización de la variable tiempo resultante del proceso de secuenciación implica una normalización de la frecuencia Ω por el factor $1/T_s$. Así, la frecuencia angular de tiempo discreto ω, queda definida como $\omega = \Omega T_s$, y $\omega_s = \Omega_s T_s = 2\pi$



El modelo de un conversor de tiempo discreto a tiempo continuo está definido de acuerdo con el siguiente sistema:



De acuerdo con el modelo presentado, el proceso de conversión a tiempo continuo se realiza mediante dos procesos:

1.- Secuenciación. Mediante la cual la secuencia discreta *f[n]* es convertida en un tren de impulsos modulado. En este proceso la variable tiempo es escalada por un factor T_p.

$$f_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]\,\delta(t - n\,T_p)$$

2.- Filtrado. Mediante el cual la señal continua en tiempo *f(t)* es obtenida a partir del tren de impulsos $f_s(t)$: $f(t) = h(t) * f_s(t)$.

Aunque muchos filtros pueden ser usados para obtener una señal continua a partir del tren de impulsos $f_s(t)$, existe un filtro óptimo que se conoce como filtro de reconstrucción ideal.

- **Su respuesta impulsiva está dada por:**

$$h_{ideal}(t) = \frac{\sin(\pi t/T_p)}{\pi t/T_p}$$

- **Y su respuesta en frecuencia está dada por:**

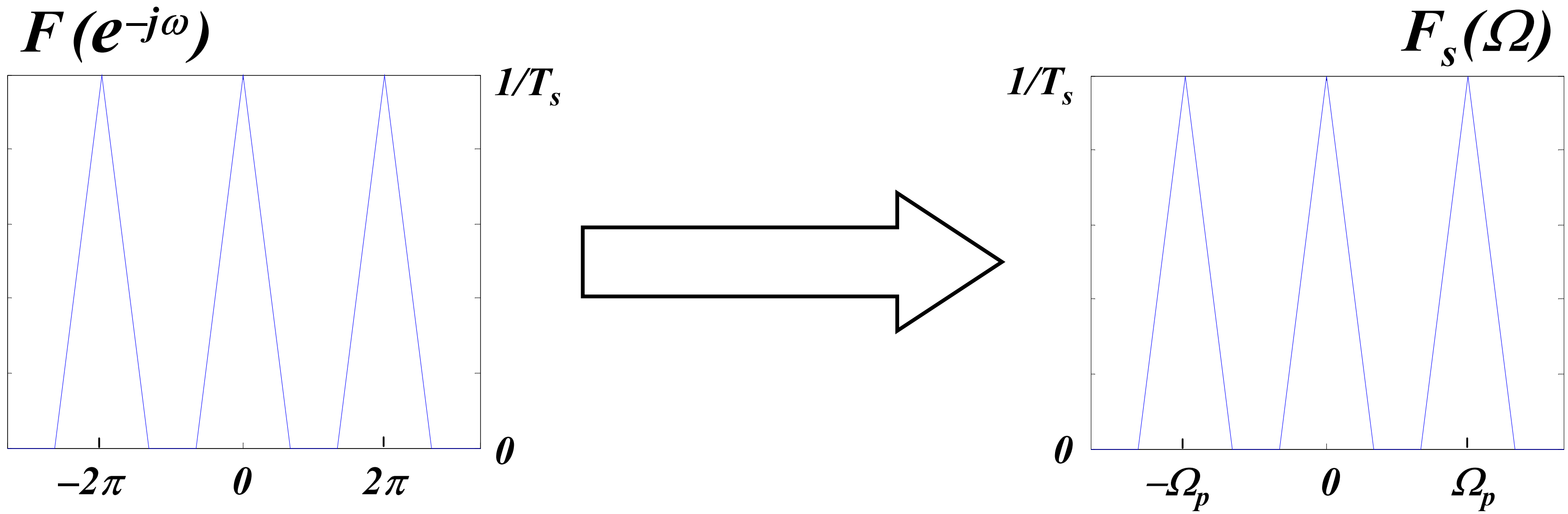
$$H_{ideal}(\Omega) = \begin{cases} T_p, & si\ |\Omega| < \pi/T_p \\ 0, & en\ el\ resto \end{cases}$$

El filtro de reconstrucción ideal $h_{ideal}(t)$ permite recuperar una señal continua $f(t)$ a partir de sus muestras $f[n]$ si se cumplen las dos condiciones siguientes:

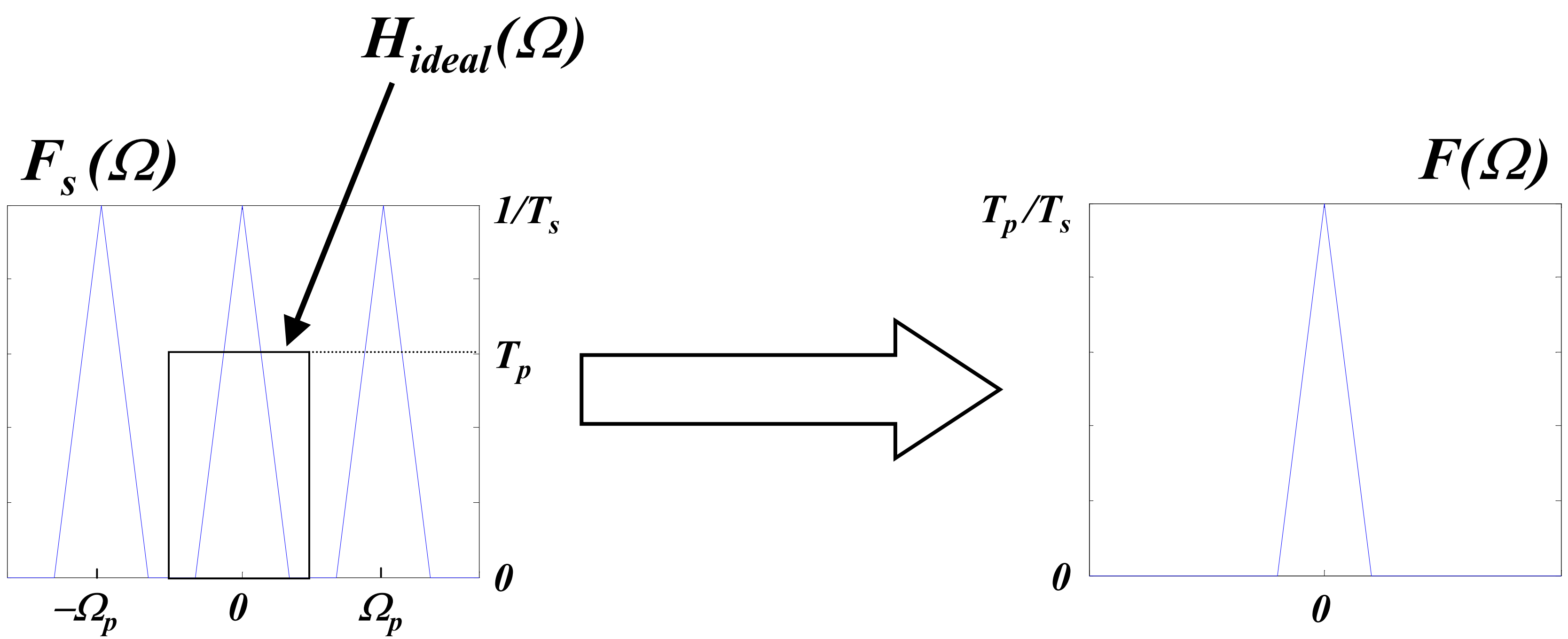
- **El período de muestreo original T_s y el período de reconstrucción T_p son iguales.**
- **El período de muestreo original T_s satisface la condición del teorema de muestreo de Nyquist-Shannon: $1/T_s \geq 2\, f_{máxima}$**

La conversión a tiempo continuo puede verse en la frecuencia así:

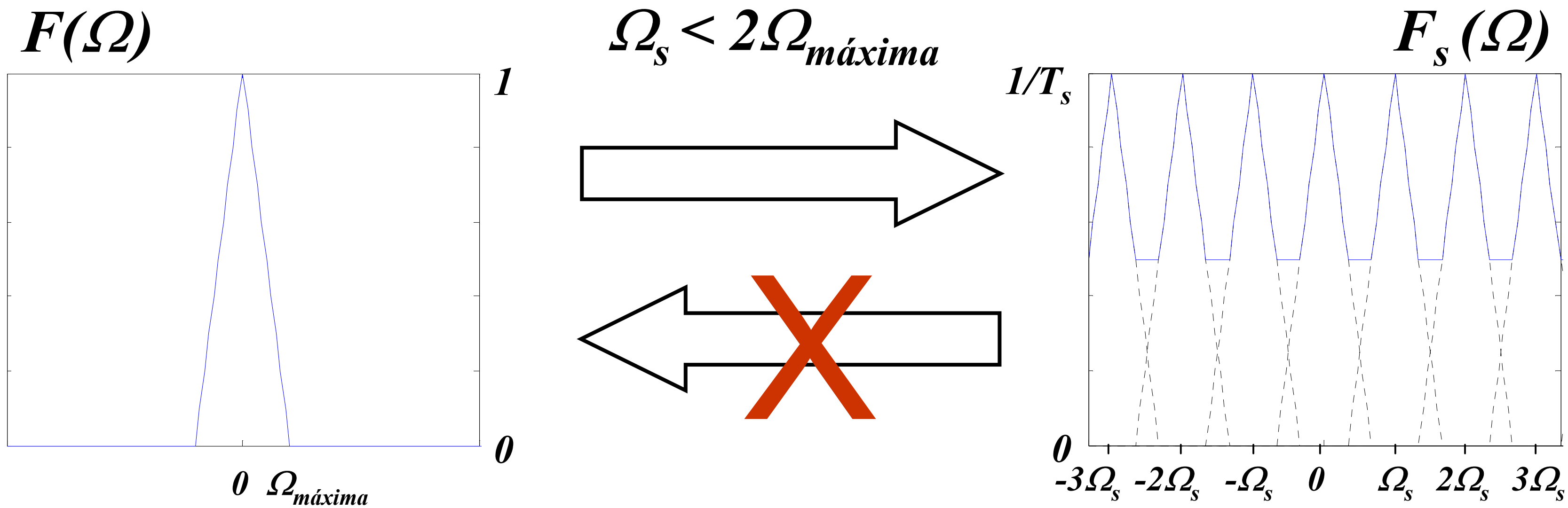
1.- El escalamiento de la variable tiempo por el factor T_p implica un escalamiento de la frecuencia angular de tiempo discreto ω por el factor $1/T_p$. Así, $\Omega = \omega/T_p$, y $\Omega_p = 2\pi/T_p$.



2.- El filtrado corresponde a la multiplicación de los espectros del filtro de reconstrucción y del tren de impulsos modulado. De forma que $F(\Omega) = H_{ideal}(\Omega)\, F_s(\Omega)$.



Cuando una señal continua *f(t)* es muestreada con frecuencias por debajo del doble de su frecuencia máxima, entonces las copias resultantes de su espectro $F(\Omega - k\,\Omega_s)$ se solapan y su espectro original $F(\Omega)$ se hace irrecuperable.



1.- Representación discreta de señales continuas

2.- Muestreo, reconstrucción y aliasing

3.- Consideraciones prácticas sobre el muestreo

4.- Cambio del período de muestreo

Los modelos matemáticos estudiados en la sección anterior no son realizables en la práctica por dos razones principales:

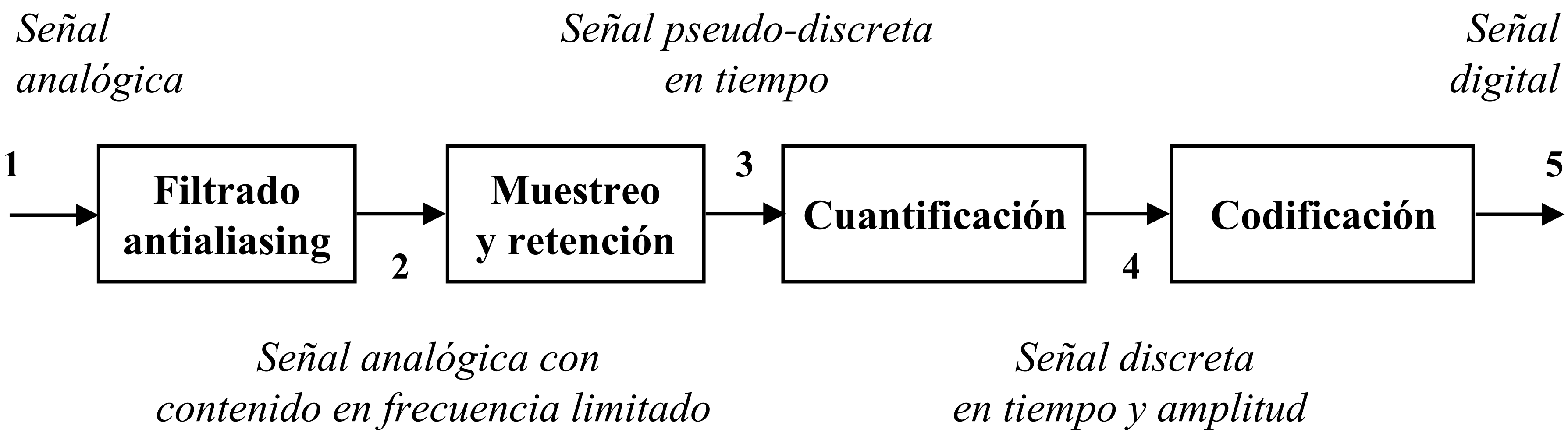
1.- No es posible construir un tren de impulsos

2.- No es posible construir filtros de reconstrucción ideal

Adicionalmente, en la práctica, además del muestreo se llevan a cabo procesos de discretización en amplitud y codificación con el objeto de obtener representaciones digitales para las señales muestreadas.

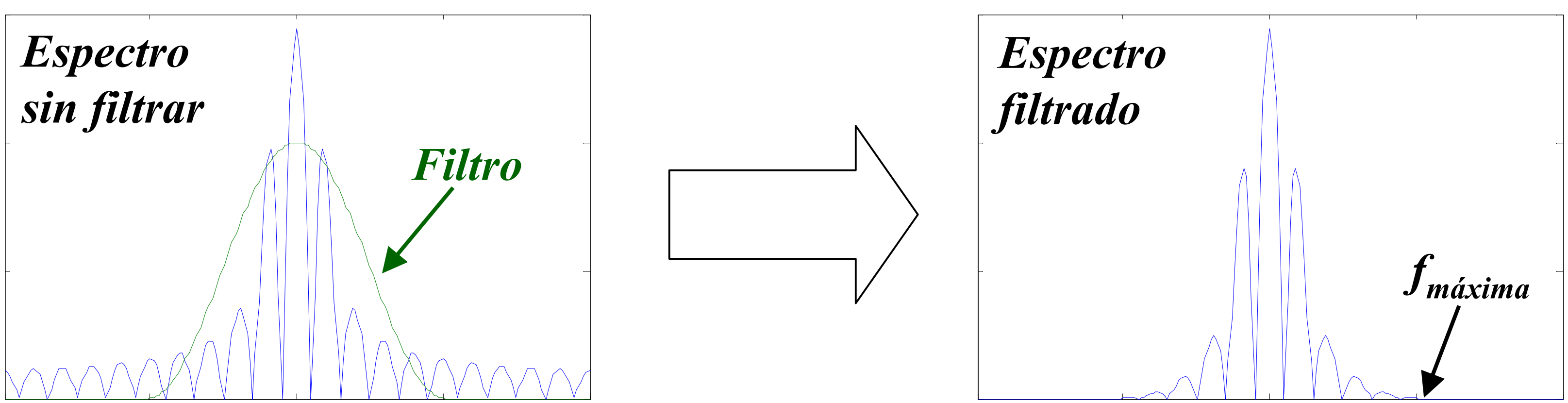
Pasos para la conversión A/D

En la práctica, la conversión de una señal analógica a digital se realiza mediante los siguientes pasos*:

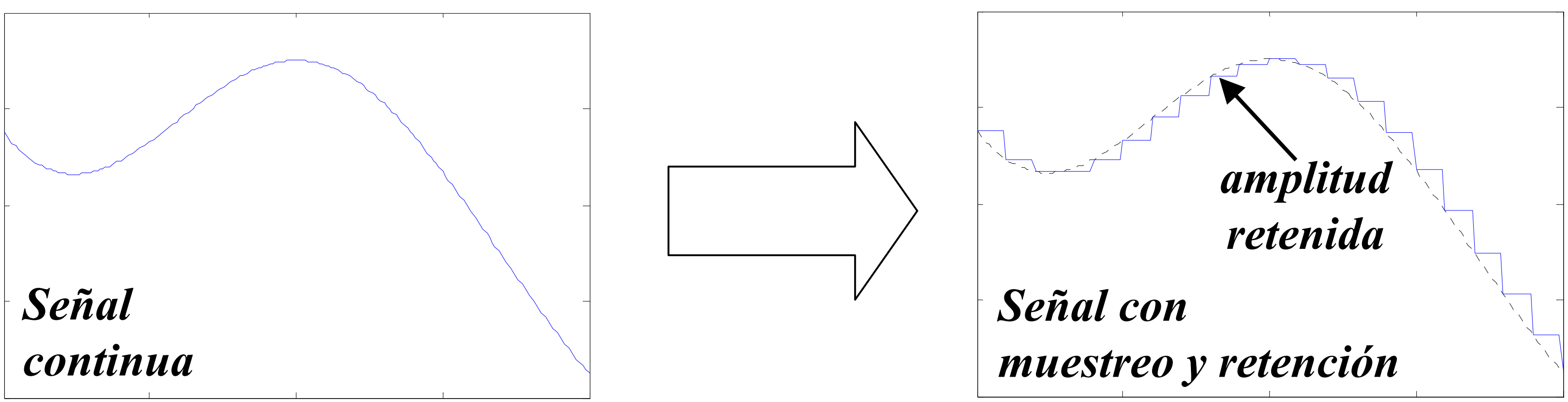


*** El estudio detallado de estos procesos no es objeto de este curso**

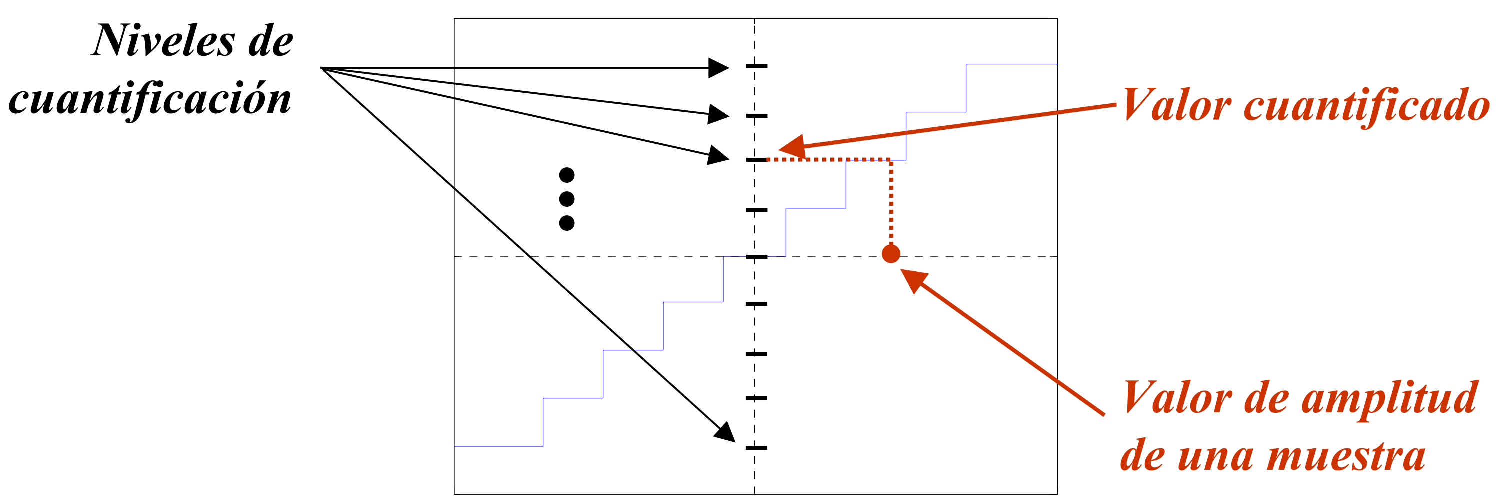
El filtrado antialiasing se usa para garantizar que no habrá aliasing una vez muestreada la señal continua. Este proceso consiste en la utilización de un filtro que limita el contenido de frecuencia de la señal que se va a digitalizar.



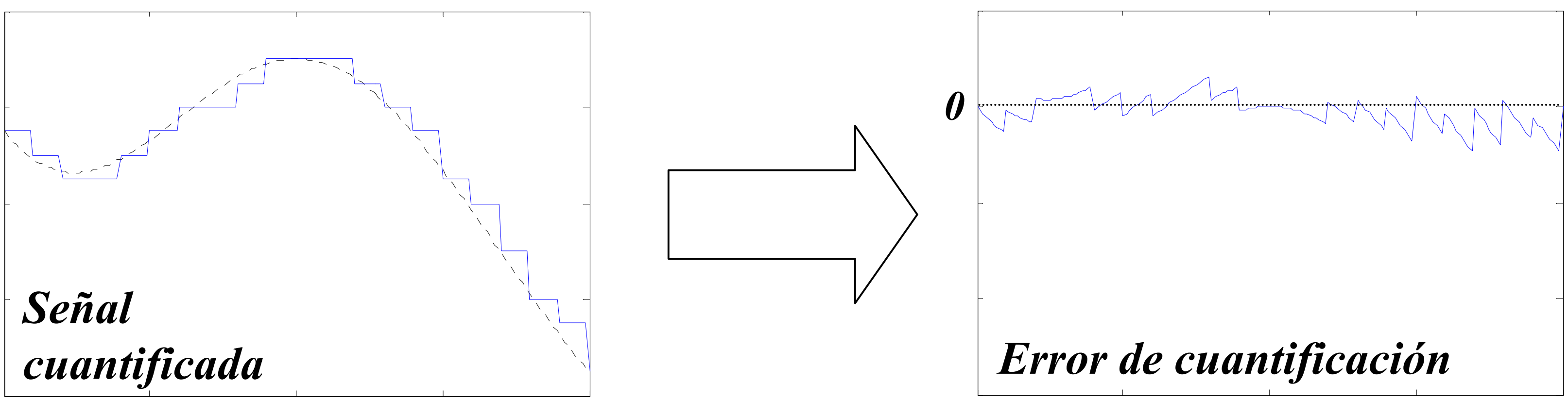
El proceso de muestreo y retención se utiliza para fijar el valor de la señal continua por intervalos de duración igual al período de muestreo T_s para dar tiempo al cuantificador a discretizar el valor de la amplitud.



La cuantificación es un proceso mediante el cual a cada muestra de la señal se le asigna el valor más cercano de un conjunto finito de valores posibles predefinidos.



El proceso de cuantificación es irreversible, en el sentido de que la información que se pierde en este proceso es irrecupe-rable. A la diferencia entre la señal original y los valores que resultan de este proceso se le llama error de cuantificación.

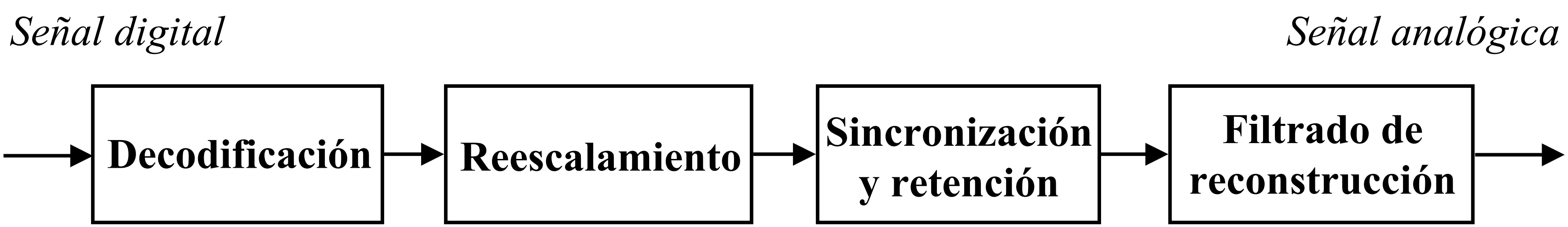


La codificación consiste en asignar un código a cada valor de amplitud cuantificado. La señal resultante de este proceso es una señal digital.

Existen muchos tipos de códigos. Un ejemplo muy común es el formato binario sin signo para números enteros:

$$a_N \cdots a_2\, a_1\, a_0 = \sum_{i=0}^{N} a_i\, 2^i\,, \quad con\ a_i = \{\, 0, 1 \,\}$$

La conversión de una señal digital a analógica se realiza mediante los siguientes pasos*:

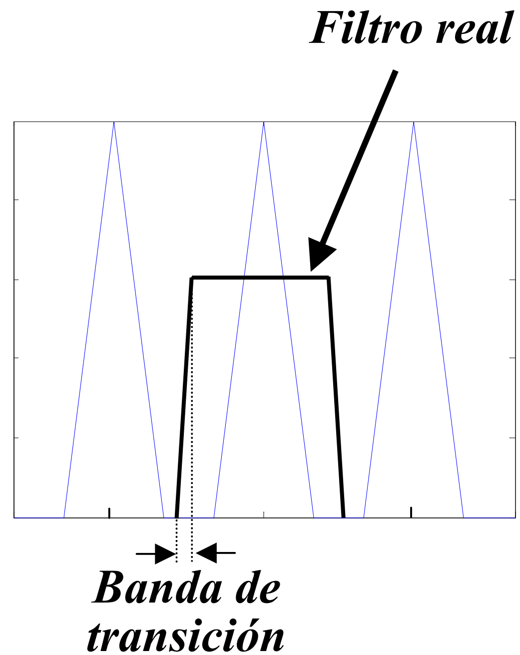


Donde cada uno de estos sistemas revierte, en la medida de lo posible, los procesos realizados durante la conversión A/D

*** El estudio detallado de estos procesos no es objeto de este curso**

Finalmente es importante destacar que en la práctica siempre se usan frecuencias de muestreo mayores a la establecida por en el teorema de muestreo: $f_s > 2\, f_{máxima}$

Esto se debe al hecho de que los filtros reales siempre tienen una banda de transición que es necesario tomar en cuenta para la reconstrucción.



1.- Representación discreta de señales continuas

2.- Muestreo, reconstrucción y aliasing

3.- Consideraciones prácticas sobre el muestreo

4.- Cambio del período de muestreo

Hay veces en las que se hace necesario cambiar el período de muestreo de una señal discreta.

- **Una forma de lograr este objetivo es:**

Señal discreta con $Ts = T_1$ → **Conversión D/C** → ***Señal continua en tiempo*** → **Conversión C/D** → ***Señal discreta con*** $Ts = T_2$

- **Sin embargo esta operación puede realizarse completamente en el dominio discreto !!!**

El proceso de submuestreo (*downsampling*) se realiza a través del siguiente sistema, denominado compresor discreto:

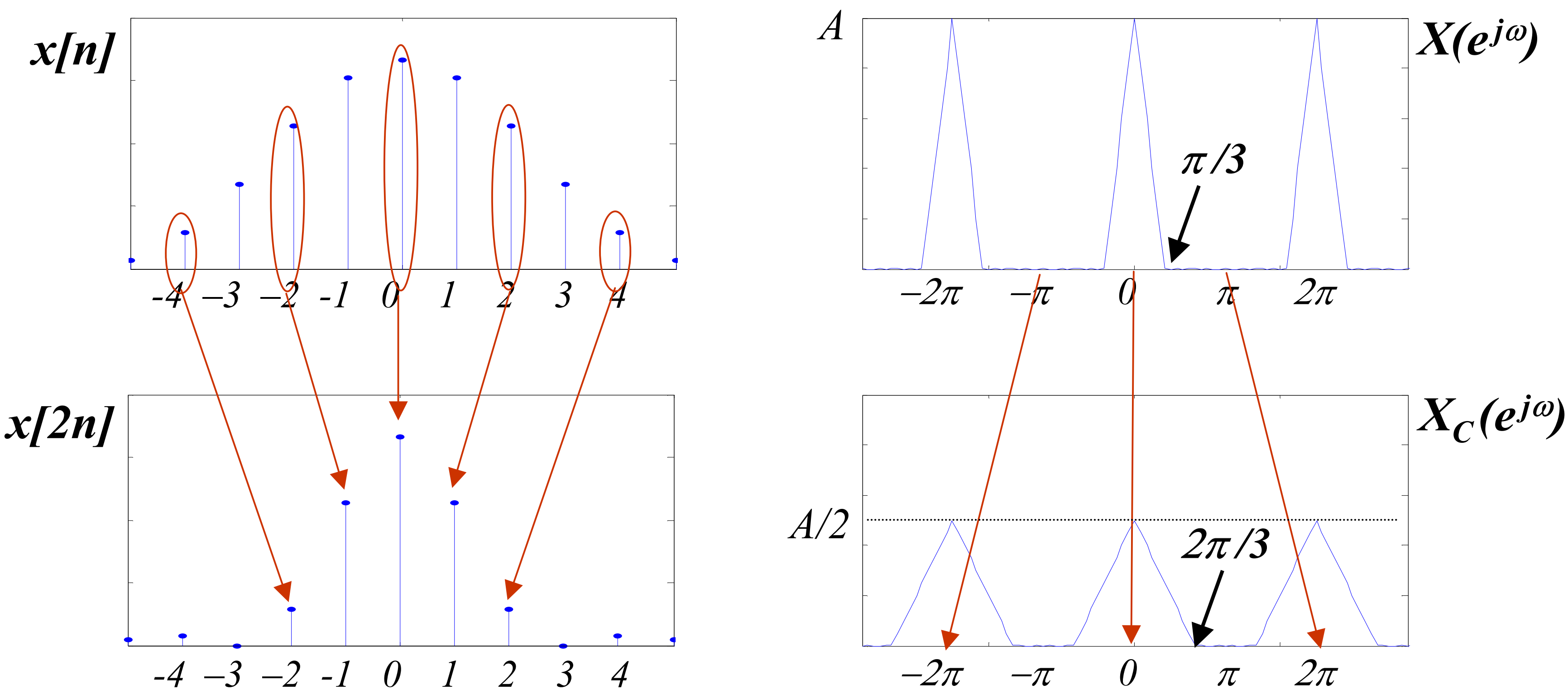
$$x[n] \longrightarrow \boxed{\downarrow M} \longrightarrow x_C[n] = x[nM]$$

Donde *M* se denomina el *factor de compresión*

- **Las DTFT de $x[n]$ y $x_C[n]$ se relacionan de la siguiente forma:**

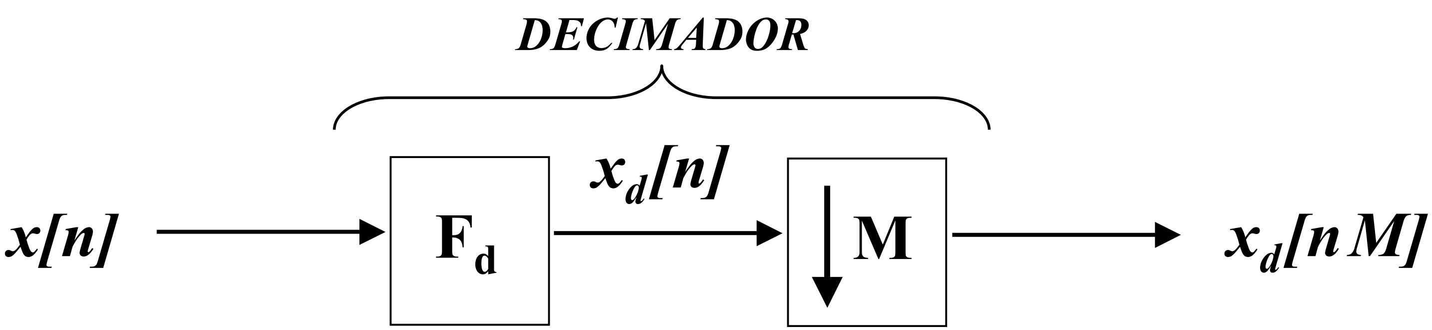
$$X_C(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} X(e^{j(\omega - 2\pi m)/M})$$

En este ejemplo se ilustra el proceso de submuestreo con $M = 2$ para una señal con $|\omega_{max}| = \pi/3$



En este ejemplo se ilustra el proceso de submuestreo con $M = 2$ para una señal con $|\omega_{max}| = \pi/3$

Para evitar el *aliasing* se aplica un filtro antes de submuestrear, este proceso combinado de filtrado y compresión se conoce como decimación.



- **Donde la respuesta del filtro es:** $F_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega - 2\pi k| < \pi/M \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$

El proceso de sobremuestreo (*upsampling*) se realiza a través del siguiente sistema, denominado expansor discreto:

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\uparrow L} \longrightarrow x_E[n] = \begin{cases} x[n/L], & n = kL \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

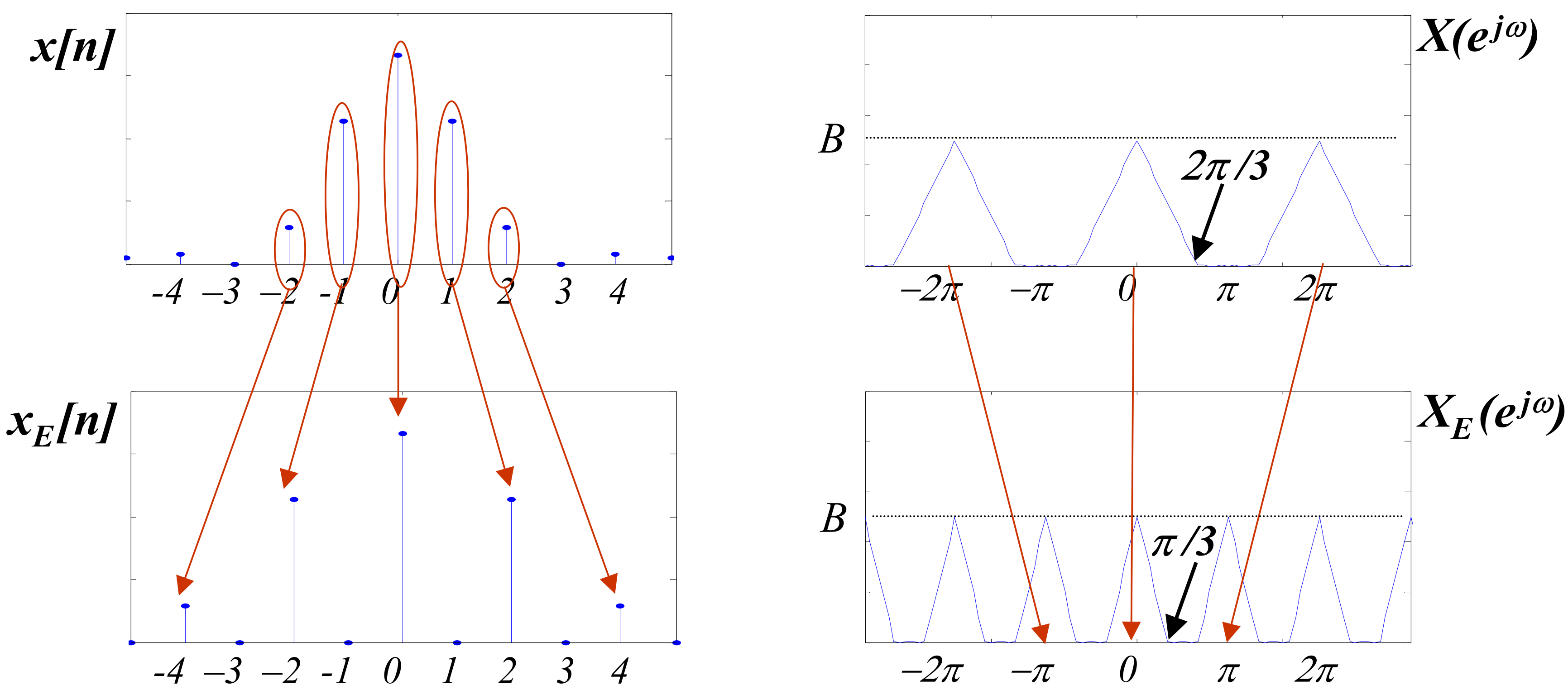
Donde L se denomina el *factor de expansión*

- **Las DTFT de $x[n]$ y $x_E[n]$ se relacionan de la siguiente forma:**

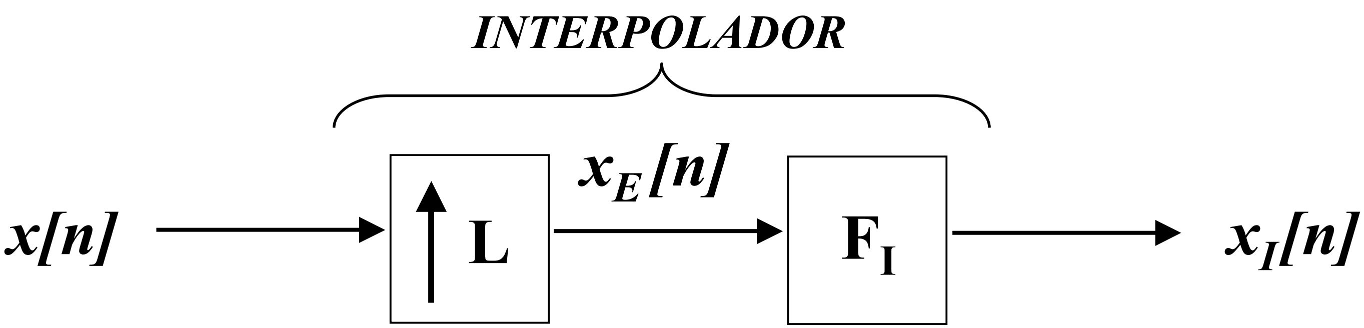
$$X_E(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega L})$$

Ejemplo de sobremuestreo

En este ejemplo se ilustra el proceso de sobremuestreo con $L = 2$ para una señal con $|\omega_{max}| = 2\pi/3$

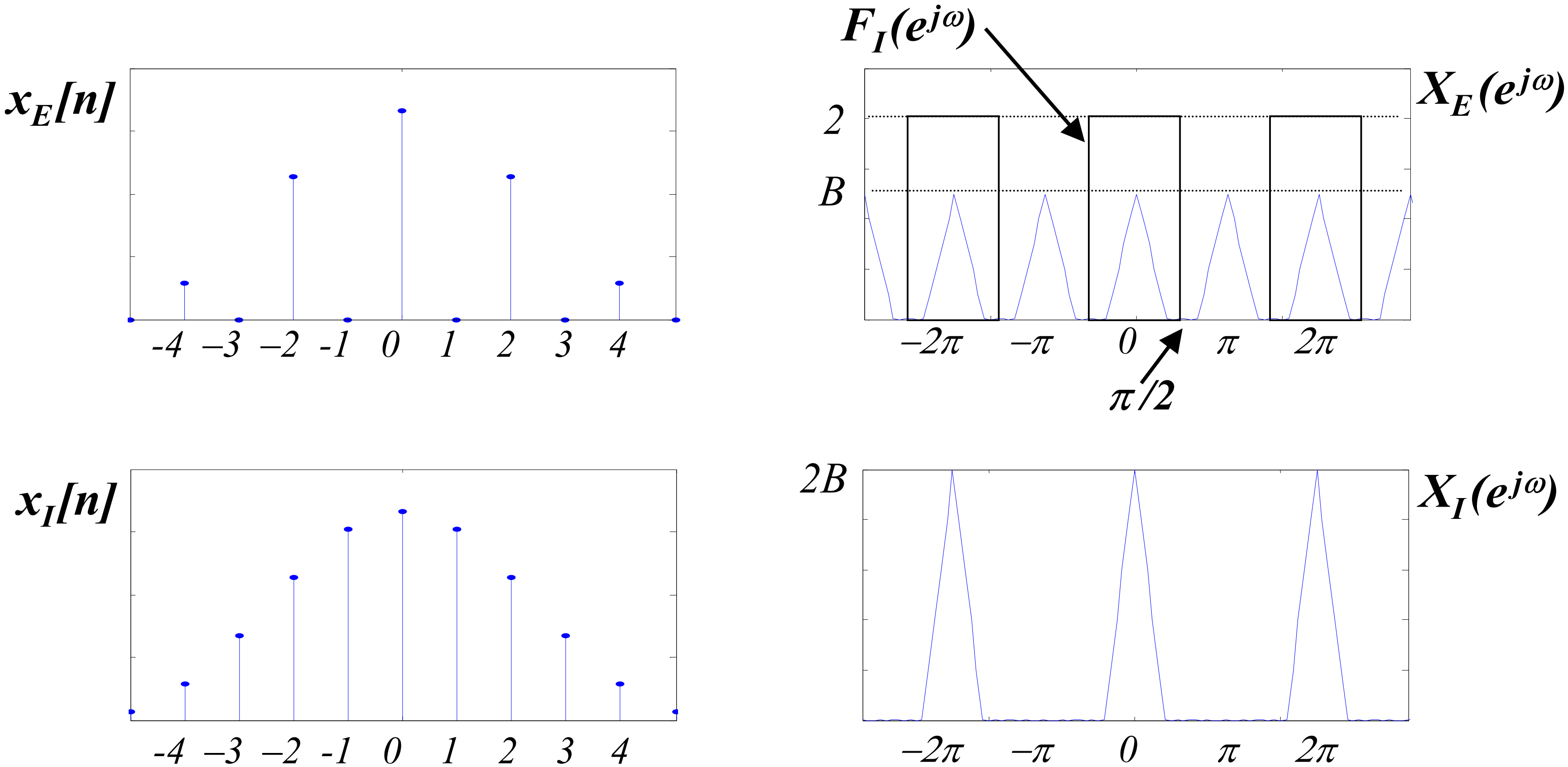


Para "completar" los valores de una señal expandida se aplica un filtro después de sobremuestrear, este proceso combinado de expansión y filtrado se conoce como interpolación.

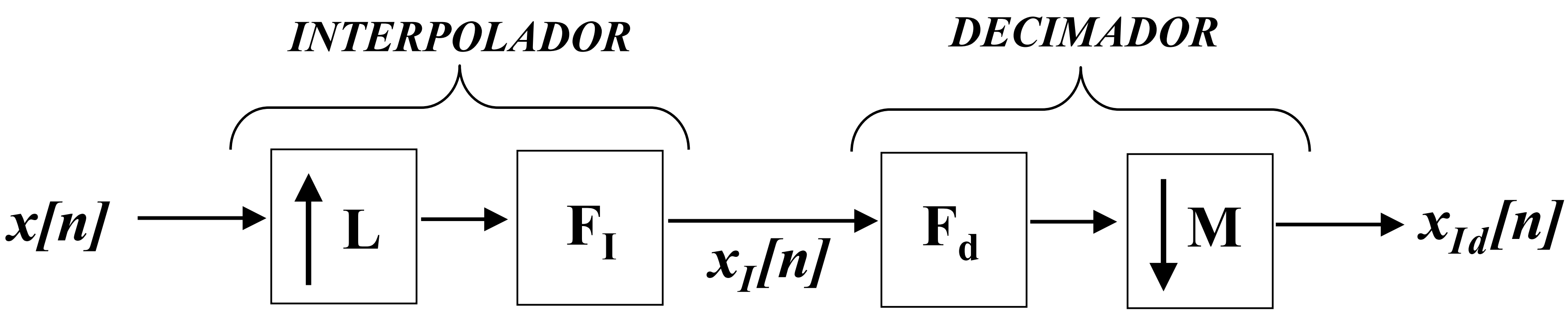


- **Donde la respuesta del filtro es:** $F_I(e^{j\omega}) = \begin{cases} L, & |\omega - 2\pi k| < \pi/L \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$

En este ejemplo se muestra el filtrado de interpolación con $L=2$



El proceso de remuestreo (*resampling*) por un factor no entero se realiza mediante la conexión en cascada de un interpolador y un decimador:



Período de muestreo original: T

Período de muestreo intermedio: T/L

Período de muestreo final: TM/L

Fin del Módulo IV

La Teoría de Muestreo