Señales y Sistemas II

Módulo III: Señales Estocásticas

1.- Probabilidades y variables aleatorias

2.- Procesos estocásticos y promedios

3.- Estacionaridad y ergodicidad

4.- La densidad espectral de potencia

1.- Probabilidades y variables aleatorias

2.- Procesos estocásticos y promedios

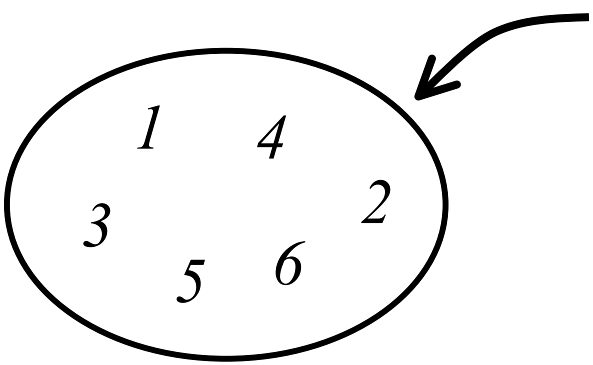
3.- Estacionaridad y ergodicidad

4.- La densidad espectral de potencia

Axioma #1

Sea *S* el espacio muestral de un experimento, entonces su probabilidad es igual a uno: *P(S) = 1*

Consideremos como ejemplo el lanzamiento de un dado:



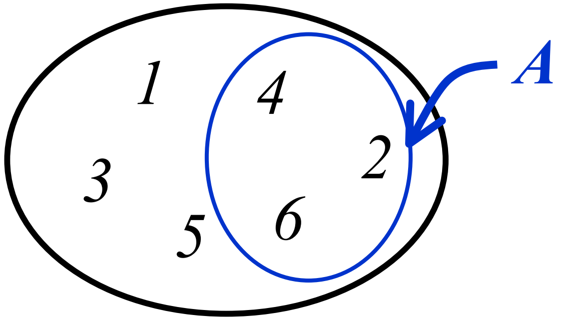
***S*: el espacio muestral representa el conjunto de todos los posibles resultados {1, 2, 3, 4, 5, 6}**

Si *A* es un evento contenido en el espacio muestral *S*, es decir

$A \subset S$, entonces: $P(A) \geq 0$

Así por ejemplo, sea *A* el evento definido por la ocurrencia de un número par al lanzar un dado:

$$P(A) = 3/6 = 1/2$$



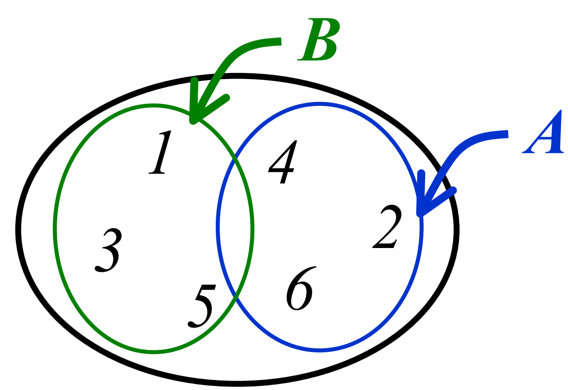
Axioma #3

Si A y B son dos eventos disjuntos (es decir $A \cap B = \emptyset$), que están contenidos en el espacio muestral S, entonces:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Así por ejemplo, si B es el evento definido por la ocurrencia de un impar al lanzar un dado:

$$P(A \cup B) = 1/2 + 1/2 = 1 = P(S)$$



Propiedades

Partiendo de los tres axiomas enunciados se pueden demostrar las siguientes propiedades:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

$$P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A}) = P(B)$$

$$P(A) \leq 1$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(\varnothing) = 0$$

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$$

Se denomina la probabilidad conjunta de dos eventos *A* y *B* a la probabilidad del evento intersección: $P(A \cap B)$

- **La probabilidad conjunta de dos eventos disjuntos es cero:**

  Si $A \cap B = \emptyset$, entonces $P(A \cap B) = 0$,

- **La probabilidad conjunta de un evento y un subconjunto de dicho evento es igual a la probabilidad del subconjunto:**

  Si $A \subset S$, entonces $P(A \cap S) = P(A)$

Se denomina la probabilidad condicional de *A* dado *B*, *P(A|B)*, a la probabilidad de ocurrencia de el evento *A* teniendo como condición el hecho de que el evento *B* ocurrió.

***P(A|B)* se calcula como el cociente de la probabilidad conjunta de *A* y *B* entre la probabilidad de *B*:**

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \;, \; con\; P(B) \neq 0$$

Algunas propiedades de la probabilidad condicional:

- **Si A es un subconjunto de B, entonces $P(A|B) = P(A) / P(B)$**

- **Si B es un subconjunto de A, entonces $P(A|B) = 1$**

- **Si A y B son eventos disjuntos, entonces $P(A|B) = 0$**

- **Teorema de Bayes: sean dos eventos A y B tales que $P(A) \neq 0$ y $P(B) \neq 0$, se cumple que: $P(A|B)\, P(B) = P(B|A)\, P(A)$**

- **LANZAMIENTO DE UN DADO**

Considera los siguientes eventos:

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ **(todos los posibles resultados)**

$A = \{2, 4, 6\}$ **(ocurrencia de un número par)**

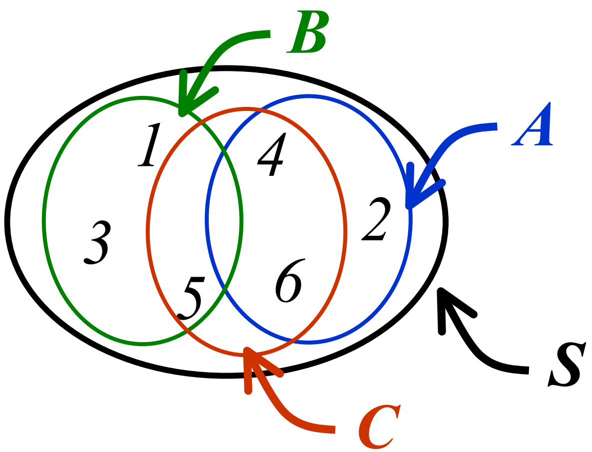
$B = \{1, 3, 6\}$ **(ocurrencia de un número impar)**

$C = \{4, 5, 6\}$ **(ocurrencia de un número mayor que tres)**

Calcula las siguientes probabilidades:

$P(A|B)$, $P(A \cap C)$, $P(A \cup C)$, $P(\{2\}|A)$, $P(B \cap S)$

- **RESPUESTA**



$$P(A|B) = P(\emptyset) / P(B) = 0$$

$$P(A \cap C) = P(\{4,6\}) = 2/6 = 1/3$$

$$P(A \cup C) = P(\{2,4,5,6\}) = 4/6 = 2/3$$

$$P(\{2\}|A) = P(\{2\} \cap A) / P(A) = 1/6 / (1/2) = 2/6 = 1/3$$

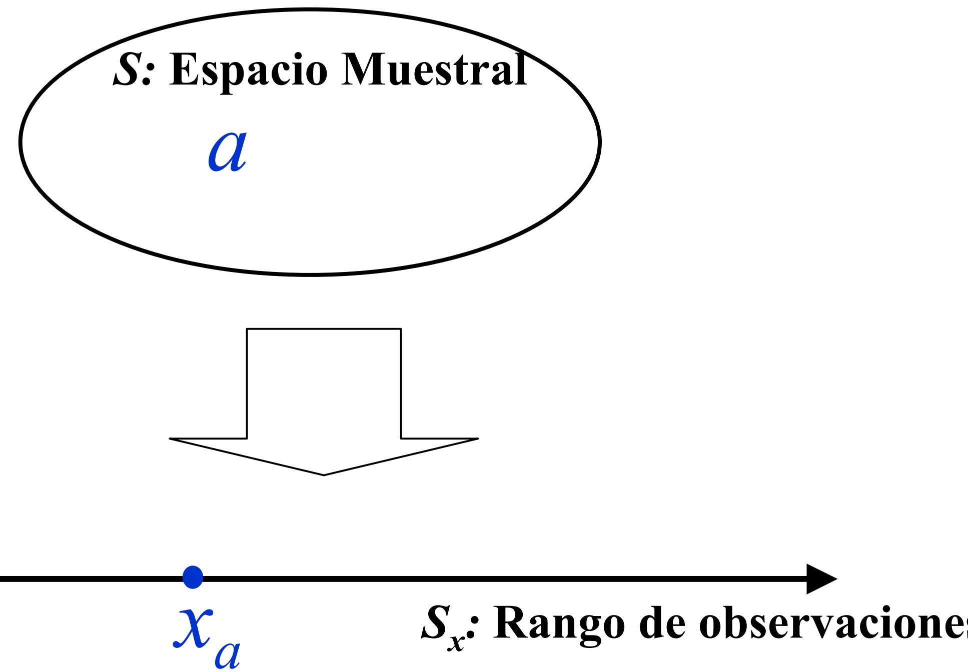
$$P(B \cap S) = P(B) = 3/6 = 1/2$$

Se dice que dos eventos *A* y *B* son independientes si se cumple que cualquier condición sobre la ocurrencia de *B* no tiene efecto sobre la probabilidad de *A* y viceversa.

Si *A* y *B* son independientes, se cumple que: $P(A|B) = P(A)$, lo cual a su vez implica que: $P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$

Se define como variable aleatoria a una función que mapea el espacio muestral de un experimento en el conjunto de los números reales:

$$x_a = X(a)$$



Cuando el rango de observaciones $S_x = \{x_1, x_2, ...\}$ es discreto nos referiremos a X como una variable aleatoria discreta.

pmf: función de masa probabilística $P(X = x_i) = P(x_i)$

pdf: función de densidad probabilística $f_x(x) = \sum_i P(x_i)\ \delta(x - x_i)$

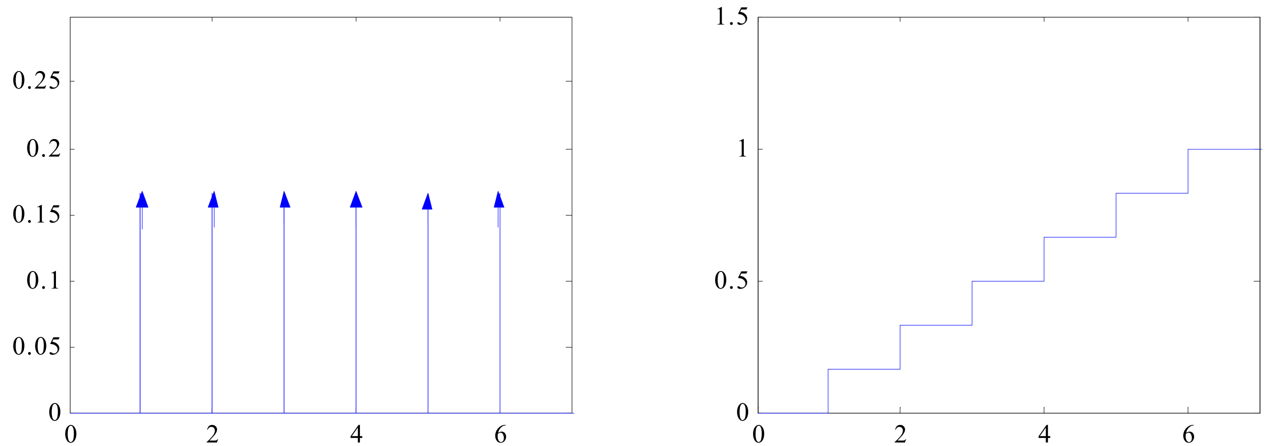
cdf: función de distribución cumulativa $F_x(x) = \sum_i P(x_i)\ u(x - x_i)$

Ejemplo: lanzamiento de un dado

$$S_x = \{x_i = i: i = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}; \quad \text{pmf: } P(x_i) = 1/6;$$

$$\text{pdf: } f_x(x) = 1/6 \sum_{i=1}^{6} \delta(x - i); \quad \text{cdf: } F_x(x) = 1/6 \sum_{i=1}^{6} u(x - i)$$

Densidad probabilística (pdf) | **Distribución cumulativa (cdf)**



Cuando el rango de observaciones S_x es continuo nos referiremos a X como una variable aleatoria continua.

cdf: función de distribución cumulativa $F_x(x) = P(X \leq x)$

pdf: función de densidad probabilística $f_x(x) = \dfrac{d}{dx} F_x(x)$

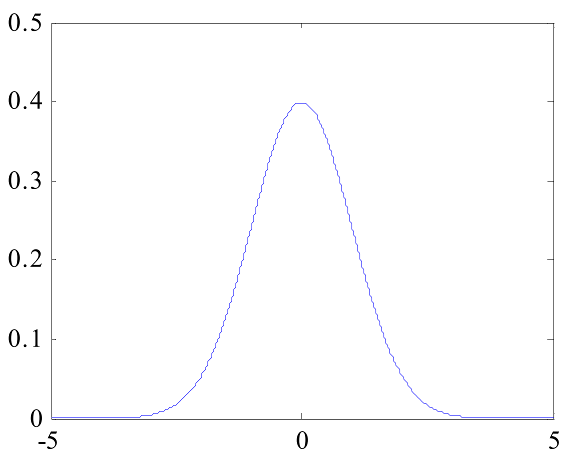
Observación: para X continua $P(X = x_i) = 0$

Ejemplo: variable aleatoria gaussiana

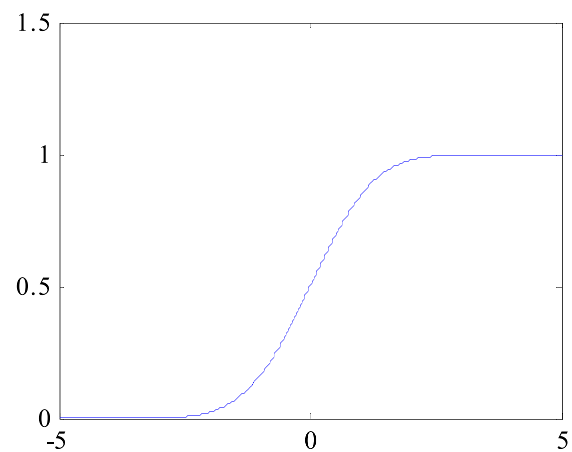
$$\textbf{pdf: } f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-x^2/2)$$

$$\textbf{cdf: } F_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp(-u^2/2)\,du$$

Densidad probabilística (pdf)



Distribución cumulativa (cdf)



1.- Probabilidades y variables aleatorias

2.- Procesos estocásticos y promedios

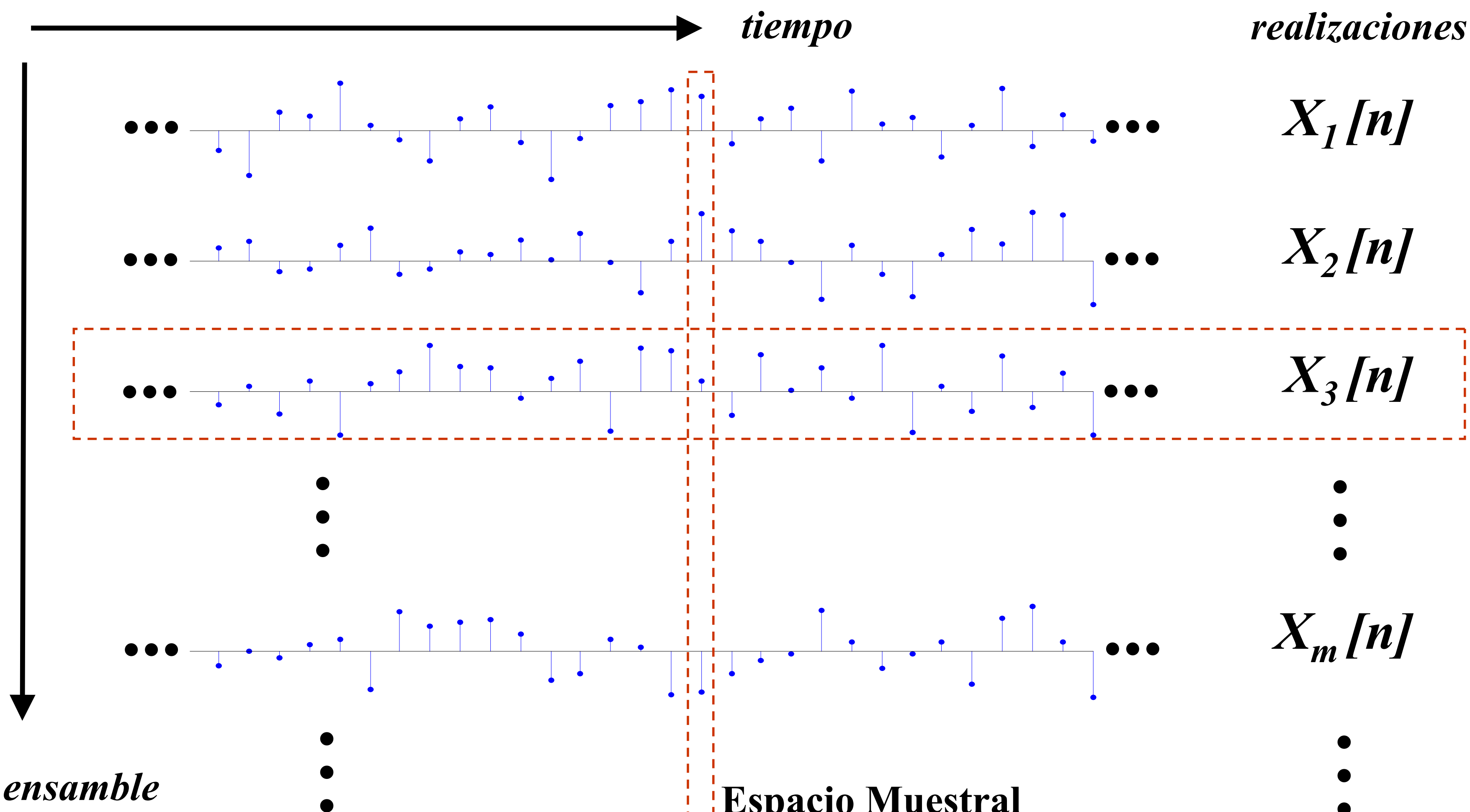
3.- Estacionaridad y ergodicidad

4.- La densidad espectral de potencia

Una secuencia aleatoria puede ser representada mediante un proceso estocástico, el cual consiste en una familia indexada de variables aleatorias: $X[n] = \{ X_n \}$

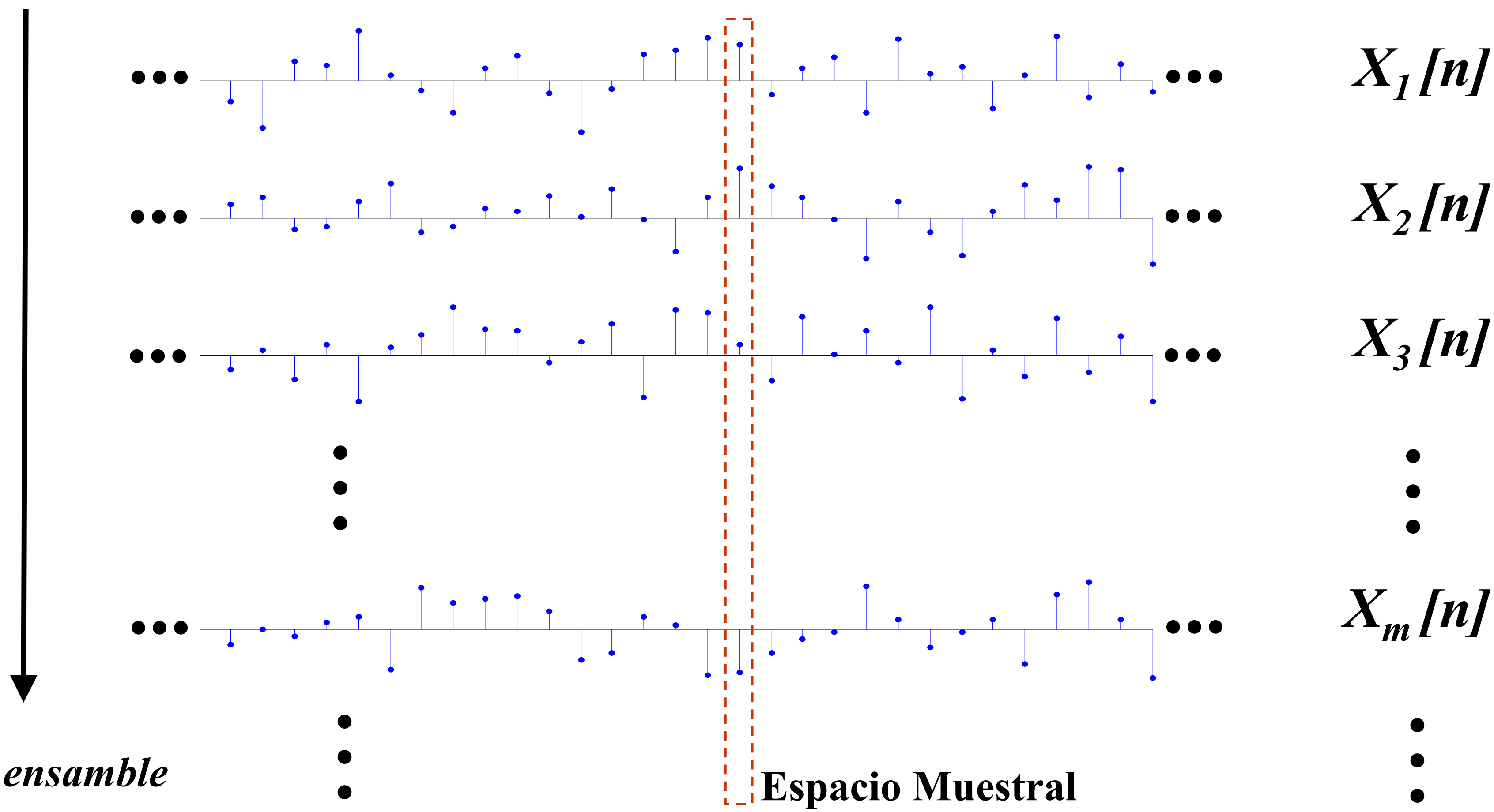
Para cada valor de n**,** $X[n]$ **representa una variable aleatoria con función de distribución cumulativa** $F_X(x_n, n) = P(X_n \leq x_n)$ **y función de densidad probabilística** $f_X(x_n, n) = \dfrac{d}{dx_n} F_X(x_n, n)$

Dimensiones de ensamble y tiempo



Espacio Muestral de la variable aleatoria *X[k]*

Promedios en el ensamble



de la variable aleatoria *X[k]*

Valor medio ó valor esperado

El valor esperado de un proceso estocástico X_n se define como:

$$E\{X_n\} = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x,n)\, dx = \mu_x[n]$$

Propiedades:

- $E\{X_n + Y_m\} = E\{X_n\} + E\{Y_m\}$
- $E\{k\, X_n\} = k\, E\{X_n\}$
- **Si X_n y Y_m son independientes:** $E\{X_n Y_m\} = E\{X_n\}\, E\{Y_m\}$

Valor cuadrático medio y varianza

El valor cuadrático medio de un proceso estocástico X_n se define como:

$$E\{\,|X_n|^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^2 f_X(x,n)\, dx = msv_x[n]$$

Y su varianza se define como:

$$Var\{X_n\} = E\{\,|X_n - E\{X_n\}|^2\} = \sigma_x^2[n]$$

- **VARIANZA Y VALOR ESPERADO**

Demuestra que la varianza y el valor esperado satisfacen la siguiente relación:

$$Var\{X_n\} = E\{\,|X_n|^2\} - |E\{X_n\}|^2$$

- **RESPUESTA**

De la definición de varianza es $Var\{X_n\} = E\{\,|X_n - E\{X_n\}|^2\}$

y desarrollando el factor cuadrático:

$$Var\{X_n\} = E\{\,|X_n|^2 + |E\{X_n\}|^2 - X_n^*\, E\{X_n\} - X_n\, E\{X_n\}^*\}$$

Aplicando las propiedades de linealidad del valor esperado:

$$Var\{X_n\} = E\{\,|X_n|^2\,\} + |E\{X_n\}|^2 - E\{X_n^*\}\, E\{X_n\} - E\{X_n\}\, E\{X_n\}^*$$

$$Var\{X_n\} = E\{\,|X_n|^2\,\} + |E\{X_n\}|^2 - 2\,|E\{X_n\}|^2$$

de donde finalmente:

$$\boxed{Var\{X_n\} = E\{\,|X_n|^2\,\} - |E\{X_n\}|^2}$$

Autocorrelación y autocovarianza

- **La secuencia de autocorrelación de un proceso estocástico X_n se define como: $\phi_{xx}[n,m] = E\{X_n\, X_m^*\}$**

- **La secuencia de autocovarianza se define como:**

  $\gamma_{xx}[n,m] = E\{(X_n - E\{X_n\})\,(X_m - E\{X_m\})^*\}$, y también puede escribirse como: $\gamma_{xx}[n,m] = \phi_{xx}[n,m] - E\{X_n\}\, E\{X_m\}^*$

- **$\phi_{xx}[n,m]$ y $\gamma_{xx}[n,m]$ miden el grado de dependencia entre los valores de un proceso estocástico para los distintos valores de tiempo *n* y *m*.**

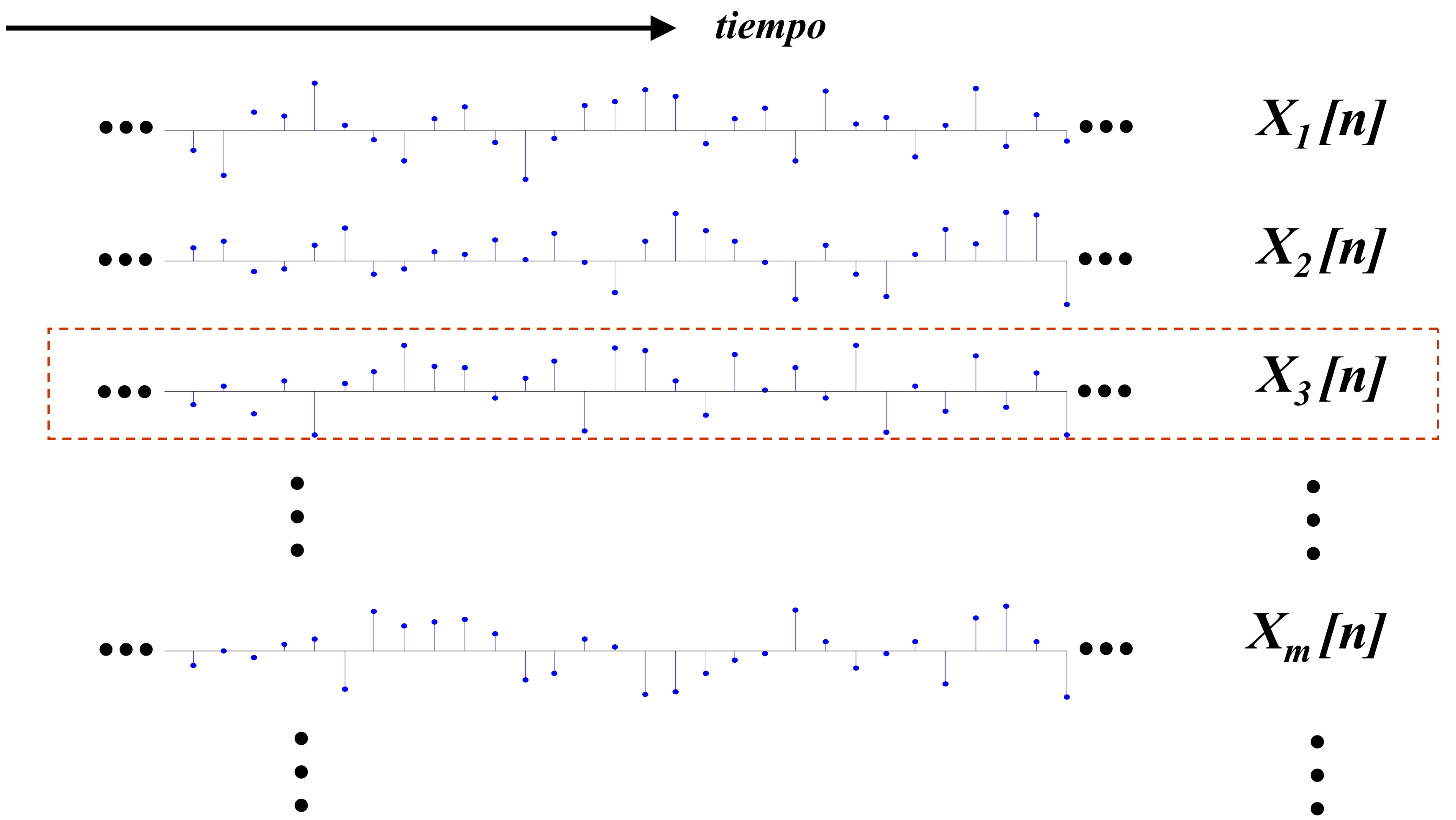
- **La secuencia de crosscorrelación para dos procesos estocásticos X_n y Y_m se define como:** $\phi_{xy}[n,m] = E\{X_n\ Y_m{}^*\}$

- **La secuencia de crosscovarianza se define como:**

  $\gamma_{xy}[n,m] = E\{(X_n - E\{X_n\})\ (Y_m - E\{Y_m\})^*\}$, **y también puede escribirse como:** $\gamma_{xy}[n,m] = \phi_{xy}[n,m] - E\{X_n\}\ E\{Y_m\}^*$

- $\phi_{xy}[n,m]$ **y** $\gamma_{xy}[n,m]$ **miden el grado de dependencia entre los valores de dos procesos estocásticos para los distintos valores de tiempo** n **y** m**.**

Promedios en el tiempo



- **El valor promedio temporal de una realización de un proceso estocástico X_n se define como:**

$$<X_n> = \lim_{L \to \infty} \frac{1}{2L+1} \sum_{n=-L}^{L} X_n$$

- **La secuencia de autocorrelación temporal de una realización de un proceso estocástico X_n se define como:**

$$<X_{n+m} X_n^*> = \lim_{L \to \infty} \frac{1}{2L+1} \sum_{n=-L}^{L} X_{n+m} X_n^*$$

1.- Probabilidades y variables aleatorias

2.- Procesos estocásticos y promedios

3.- Estacionaridad y ergodicidad

4.- La densidad espectral de potencia

Estacionaridad en sentido estricto: **se dice que un proceso es estacionario en sentido estricto cuando todas sus propiedades estadísticas son independientes del tiempo.**

Estacionaridad en sentido amplio: **se dice que un proceso es estacionario en sentido amplio cuando sus promedios de primer orden son independientes del tiempo y sus promedios de segundo orden dependen sólo de la diferencia en tiempo.**

Son los procesos estacionarios en sentido amplio los que realmente nos interesan.

Para un proceso de este tipo siempre se cumple que:

- $E\{X_n\} = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x,n)\, dx = \mu_x[n] = \mu_x$
- $Var\{X_n\} = E\{\,|X_n - E\{X_n\}|^2\} = \sigma_x^2[n] = \sigma_x^2$
- $\phi_{xx}[n+m,n] = E\{X_{n+m}\, X_n^*\} = \phi_{xx}[m]$

Dados dos procesos estacionarios X_n y Y_k ; se cumple que:

1.- $\gamma_{xx}[m] = \phi_{xx}[m] - |\mu_x|^2; \;\; \gamma_{xy}[m] = \phi_{xy}[m] - \mu_x \mu_y^2$

2.- $\phi_{xx}[0] = E\{|X_n|^2\}; \;\; \gamma_{xx}[0] = \sigma_x^2$

3.- $\phi_{xx}[-m] = \phi_{xx}^*[m]; \;\; \phi_{xy}[-m] = \phi_{xy}^*[m]$

4.- $\gamma_{xx}[-m] = \gamma_{xx}^*[m]; \;\; \gamma_{xy}[-m] = \gamma_{xy}^*[m];$

5.- $|\phi_{xy}[m]|^2 \leq \phi_{xx}[0]\,\phi_{yy}[0]; \;\; |\gamma_{xy}[m]|^2 \leq \gamma_{xx}[0]\,\gamma_{yy}[0]$

6.- $|\phi_{xx}[m]| \leq \phi_{xx}[0]; \;\; |\gamma_{xx}[m]| \leq \gamma_{xx}[0]$

7.- Si $X_n = Y_{n-k}$, entonces: $\gamma_{xx}[m] = \gamma_{yy}[m]$ **y** $\phi_{xx}[m] = \phi_{yy}[m]$

Se dice que un proceso es ergódico cuando cumple las dos condiciones siguientes:

1.- Sus promedios en tiempo $<X_n>$ y $<X_{n+m} X_n^*>$ son independientes de la realización.

2.- Sus promedios en tiempo $<X_n>$ y $<X_{n+m} X_n^*>$ coinciden con sus promedios en el ensamble μ_x y $\phi_{xx}[m]$.

Todo proceso ergódico es siempre también estacionario en sentido amplio. Lo contrario no es necesariamente cierto.

Importancia de la ergodicidad

La ergodicidad es una propiedad deseable y sumamente importante en el procesamiento de señales. Gracias a esta propiedad podemos calcular los promedios en el ensamble mediante el cálculo de los promedios en el tiempo !!!

$$E\{X_n\} = \mu_x = \langle X_n \rangle \qquad E\{X_{n+m}\, X_n^*\} = \phi_{xx}[m] = \langle X_{n+m}\, X_n^* \rangle$$

Sin embargo, como vimos en la sección anterior, el cálculo de $\langle X_n \rangle$ y $\langle X_{n+m}\, X_n^* \rangle$ implica el cómputo de sendos límites que en la práctica no es factible calcular.

Estimadores de promedios

En la práctica, los valores de μ_x, σ_x^2 y $\phi_{xx}[m]$ se aproximan mediante el uso de estimadores*:

$$\hat{\mu}_x = \langle x[n] \rangle_N = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]$$

$$\hat{\sigma}_x^2 = \langle |x[n]-\hat{\mu}_x|^2 \rangle_N = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |\, x[n] - \hat{\mu}_x \,|^2$$

$$\hat{\phi}_{xx}[m] = \langle x[n+m]\, x[n]^* \rangle_N = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n+m]\, x[n]^*$$

*** Existen muchos tipos de estimadores, aquí se presentan los más comúnmente usados**

- **SECUENCIA ALEATORIA GAUSSIANA**

Considera el proceso aleatorio discreto descrito por la siguiente función de densidad probabilística:

$$f_X(x_n, n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\,\sigma_x^2}}\; exp(-(x-\mu_x)^2 / 2\sigma_x^2)$$

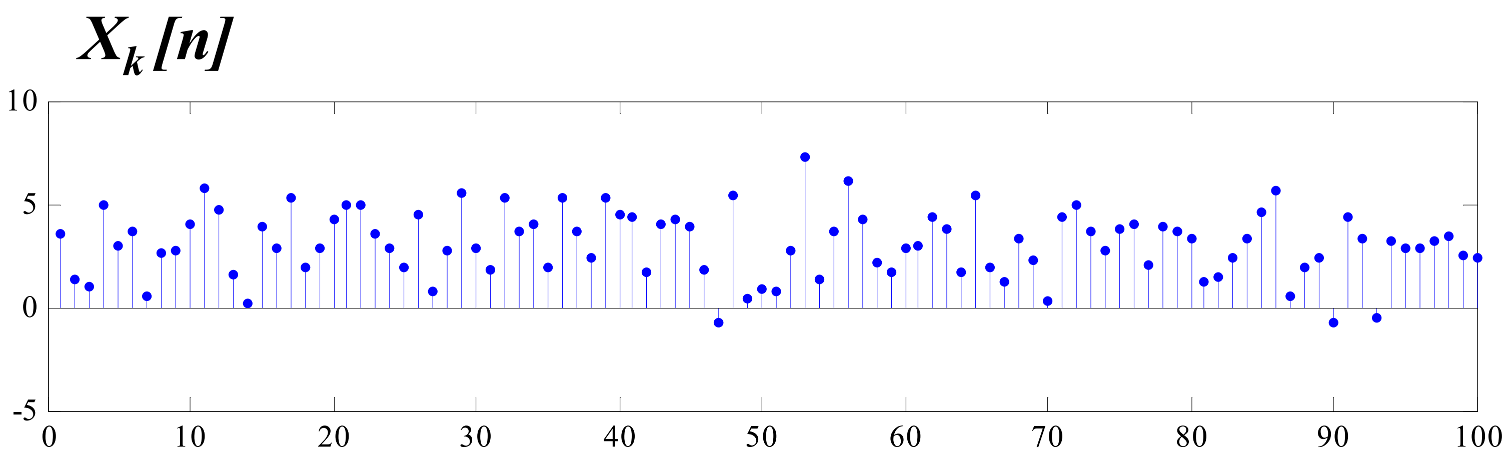
Se trata de un proceso Gaussiano estacionario con valor esperado μ_x y varianza σ_x^2.

En este ejercicio vamos a ilustrar los conceptos vistos en esta sección mediante el uso de este proceso estocástico.

- **RESPUESTA**

Para este ejercicio consideremos $\mu_x = 3$ y $\sigma_x^2 = 2$

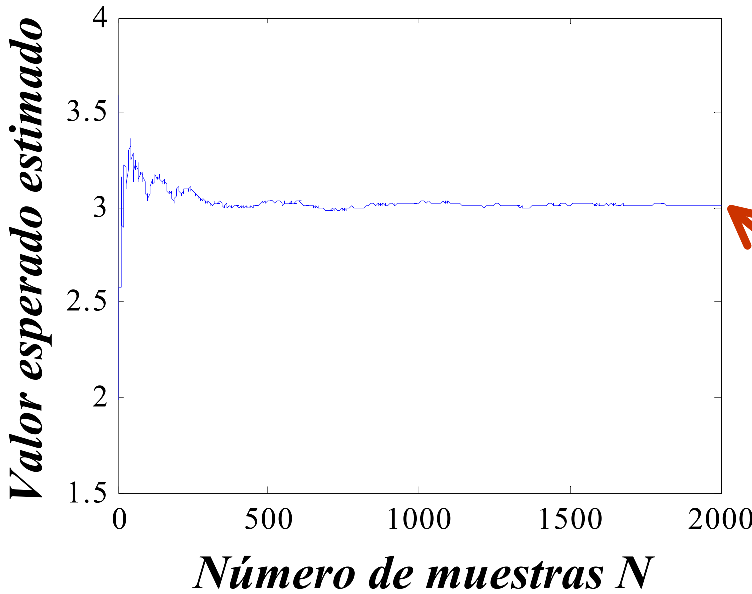
Generando una realización de este proceso tenemos:



• RESPUESTA (continuación)

Ahora estimemos* el valor de μ_x para distintos valores de N

$$\hat{\mu}_x = \langle x[n] \rangle_N = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]$$

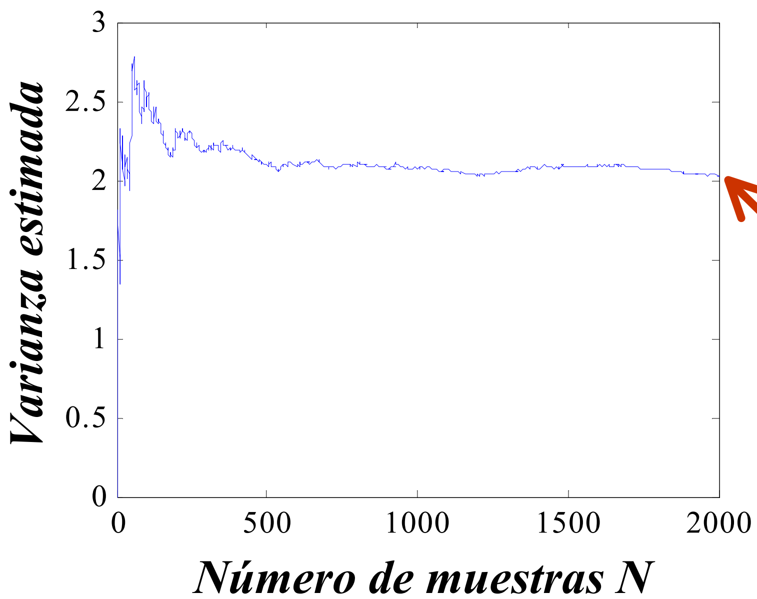


$$\boxed{\langle x[n] \rangle_{2000} = 3.0059}$$

*** Estamos asumiendo que el proceso es ergódico**

- **RESPUESTA (continuación)**

Ahora estimemos* el valor de σ_x^2 para distintos valores de N



$$\hat{\sigma}_x^2 = <|x[n]-\hat{\mu}_x|^2>_N$$

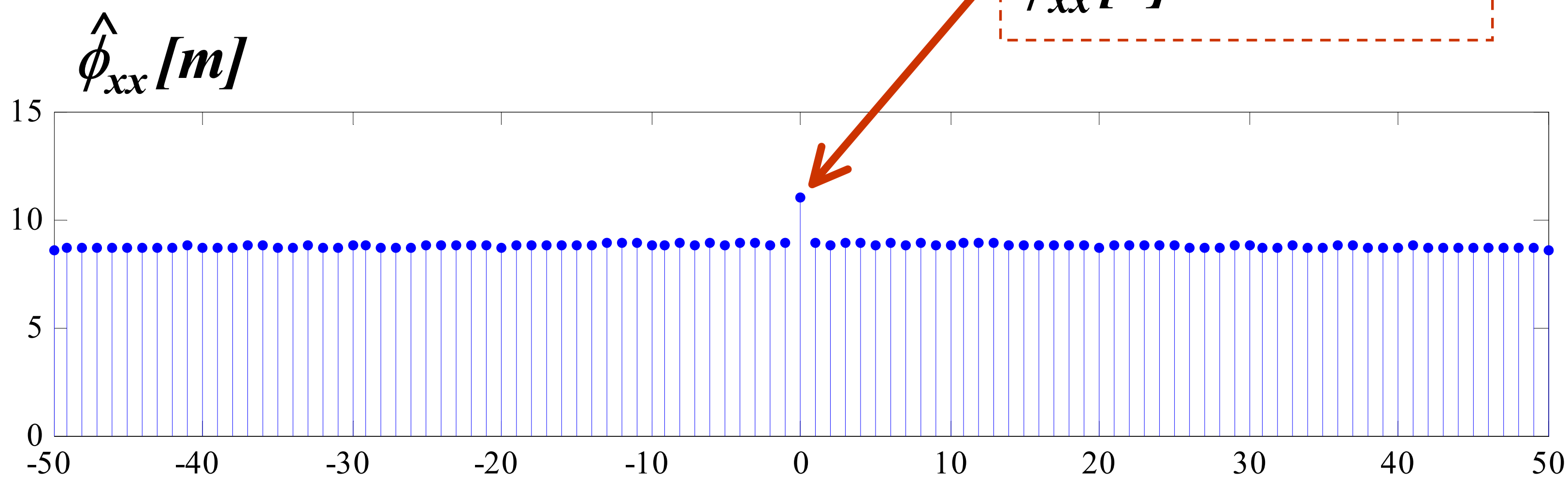
$$\boxed{<|x[n]-\hat{\mu}_x|^2>_{2000} = 2.0390}$$

*** Estamos asumiendo que el proceso es ergódico**

- **RESPUESTA (continuación)**

Ahora estimemos* la secuencia de autocorrelación $\phi_{xx}[m]$ para $N = 2000$

$$\hat{\phi}_{xx}[0] = 10.93822$$



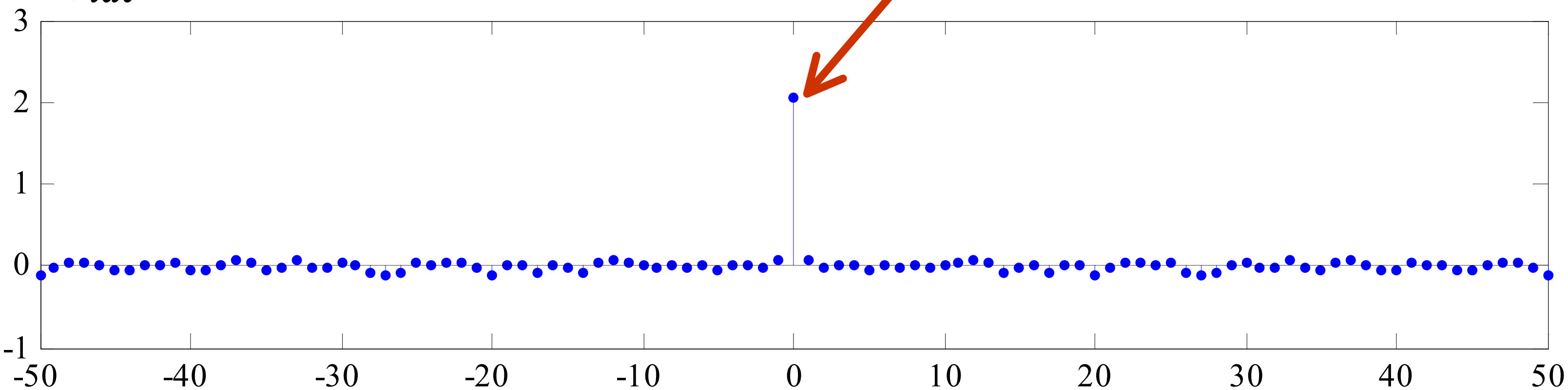
* **Estamos asumiendo que el proceso es ergódico**

- **RESPUESTA (continuación)**

Ahora estimemos* la secuencia de autocovarianza $\gamma_{xx}[m]$ para $N = 2000$

$\hat{\gamma}_{xx}[0] = 2.0596$

$\hat{\gamma}_{xx}[m]$



*** Estamos asumiendo que el proceso es ergódico**

Desde este momento en adelante, a menos que se diga lo contrario, todo proceso estocástico que se considere, se asumirá ergódico y por lo tanto estacionario en sentido amplio.

1.- Probabilidades y variables aleatorias

2.- Procesos estocásticos y promedios

3.- Estacionaridad y ergodicidad

4.- La densidad espectral de potencia

Por lo general la DTFT de una señal aleatoria no existe, sin embargo, por lo general, las DTFT de sus secuencias de auto-correlación y autocovarianza si existen.

Así, se pueden definir los siguientes pares transformados:

$$\phi_{xx}[m] \longleftrightarrow \Phi_{xx}(e^{j\omega})$$

$$\gamma_{xx}[m] \longleftrightarrow \Gamma_{xx}(e^{j\omega})$$

Donde $\Phi_{xx}(e^{j\omega})$ se conoce con el nombre de densidad espectral de potencia, ó simplemente, espectro de potencia.

Se puede demostrar que:

- $$\Phi_{xx}(e^{j\omega}) = \Gamma_{xx}(e^{j\omega}) + 2\pi\,|\mu_x|^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

- **Si $\mu_x = 0$, entonces:** $\Phi_{xx}(e^{j\omega}) = \Gamma_{xx}(e^{j\omega})$

- $\Phi_{xx}(e^{j\omega})$ **es siempre real, es decir,** $\Phi_{xx}(e^{j\omega}) = \Phi^{*}_{xx}(e^{j\omega})$

- **Si** $\phi_{xx}[m] = \phi_{xx}[-m]$**, i.e. el proceso estocástico es real, entonces** $\Phi_{xx}(e^{j\omega})$ **tiene simetría par y es no negativa.**

De la ecuación de síntesis de la DTFT, se obtiene que:

$$\phi_{xx}[m] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_{xx}(e^{j\omega})\, e^{j\omega m}\, d\omega$$

De donde se obtiene, haciendo *m = 0*, que:

$$msv_x = E\{\,|x[n]|^2\} = \phi_{xx}[0] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_{xx}(e^{j\omega})\, d\omega$$

De igual forma:

$$\gamma_{xx}[m] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Gamma_{xx}(e^{j\omega})\, e^{j\omega m}\, d\omega$$

De donde se obtiene, haciendo *m = 0*, que:

$$\sigma_x^{\,2} = E\{|x[n]-\mu_x|^2\} = \gamma_{xx}[0] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Gamma_{xx}(e^{j\omega})\, d\omega$$

También se pueden definir los siguientes pares transformados para las secuencias de crosscorrelación y crosscovarianza de dos procesos estocásticos X_n y Y_k :

$$\phi_{xy}[m] \longleftrightarrow \Phi_{xy}(e^{j\omega})$$

$$\gamma_{xy}[m] \longleftrightarrow \Gamma_{xy}(e^{j\omega})$$

Donde $\Phi_{xy}(e^{j\omega})$ se conoce con el nombre de densidad espectral de potencia cruzada.

Se puede demostrar que:

- $\Phi_{xy}(e^{j\omega}) = \Gamma_{xy}(e^{j\omega}) + 2\pi\, \mu_x\, \mu_y{}^* \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$
- **Si** $\mu_x = 0$ **y** $\mu_y = 0$**, entonces:** $\Phi_{xy}(e^{j\omega}) = \Gamma_{xy}(e^{j\omega})$
- $\Phi_{xy}(e^{j\omega})$ **es por lo general una función compleja, y se cumple que** $\Phi_{xy}(e^{j\omega}) = \Phi^*_{yx}(e^{j\omega})$

Consideremos un sistema LIT cuya entrada es estacionaria en sentido amplio

Se puede demostrar que entonces su salida también es estacionaria en sentido amplio.

• **CROSSCORRELACIÓN ENTRADA/SALIDA**

Considera un sistema LIT cuya entrada *x[n]* es una secuencia aleatoria estacionaria:

a.- Calcula la crosscorrelación entre la entrada *x[n]* y la salida *y[n]*.

b.- ¿Qué ocurre si la entrada *x[n]* es ruido blanco?

- **RESPUESTA**

Usando la definición de $\phi_{xy}[m]$ y la respuesta impulsiva $h[k]$

$$\phi_{xy}[m] = E\{\, x[n]\, y[n+m] \,\} = E\{\, x[n] \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, x[n+m-k] \,\}$$

$$\phi_{xy}[m] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, E\{\, x[n]\, x[n+m-k] \,\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, \phi_{xx}[m-k]$$

de donde se observa que:

$$\boxed{\phi_{xy}[m] = h[m] * \phi_{xx}[m]}$$

- **RESPUESTA (continuación)**

Si $x[n]$ es ruido blanco con $\mu_x = 0$ y $\sigma_x^2 = a$, se puede demostrar que: $\phi_{xx}[m] = a\,\delta[m]$

Y del resultado anterior, $\phi_{xy}[m] = h[m] * \phi_{xx}[m]$, se tiene que:

$$\boxed{\phi_{xy}[m] = a\,h[m]}$$

De forma que la secuencia de crosscorrelación $\phi_{xy}[m]$ entre la entrada $x[n]$ y la salida $y[n]$ de un sistema LIT, cuando la $x[n]$ es ruido blanco, es proporcional a la respuesta impulsiva $h[n]$.

Fin del Módulo III

Señales Estocásticas