Señales y Sistemas II

Módulo II: Transformada y Serie de Fourier en Tiempo Discreto

1.- Respuesta en frecuencia de un sistema LIT

2.- La transformada de Fourier en tiempo discreto (DTFT)

3.- La serie de Fourier en tiempo discreto (DTFS)

4.- Las transformadas discreta (DFT) y rápida (FFT)

1.- Respuesta en frecuencia de un sistema LIT

2.- La transformada de Fourier en tiempo discreto (DTFT)

3.- La serie de Fourier en tiempo discreto (DTFS)

4.- Las transformadas discreta (DFT) y rápida (FFT)

Entrada exponencial compleja

Consideremos un sistema LIT con entrada $x[n] = e^{j\omega n}$

Entonces su salida $y[n]$ **está dada por:**

$$y[n] = h[n] * e^{j\omega n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, e^{j\omega(n-k)} = e^{j\omega n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, e^{-j\omega k}$$

Donde la función compleja $H(e^{j\omega})$ definida por:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, e^{-j\omega k} = |\, H(e^{j\omega})\, |\, e^{\,j \sphericalangle H(e^{j\omega})}$$

se denomina la respuesta en frecuencia del sistema.

Autofunción de los sistemas LIT

La exponencial compleja $e^{j\omega n}$ constituye una autofunción para los sistemas LIT

$$e^{j\omega n} \Rightarrow \boxed{\textit{SISTEMA LIT}} \Rightarrow H(e^{j\omega})\, e^{j\omega n}$$

La respuesta de un sistema LIT a una entrada del tipo $e^{j\omega n}$ es una versión escalada y retardada de la entrada:

$$y[n] = H(e^{j\omega})\, e^{j\omega n} = |H(e^{j\omega})|\, e^{j(\omega n + \sphericalangle H(e^{j\omega}))}$$

- **RESPUESTA EN FRECUENCIA**

  Halla una expresión para la respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$ del diferenciador discreto causal, y esboza los gráficos del factor de escala $|H(e^{j\omega})|$ y del retardo $\sphericalangle H(e^{j\omega})$

- **RESPUESTA**

Para el diferenciador discreto causal: $h[k] = \delta[k] - \delta[k-1]$

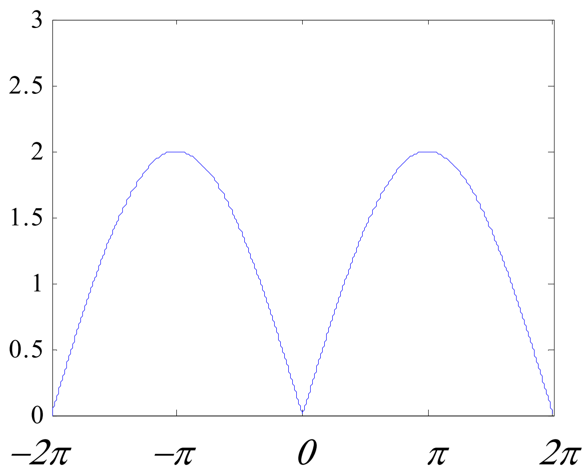
Y de la definición de respuesta en frecuencia:

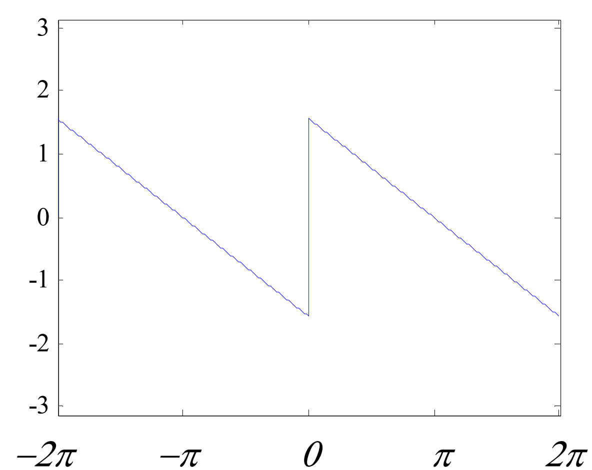
$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, e^{-j\omega k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[k]\, e^{-j\omega k} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[k-1]\, e^{-j\omega k}$$

$$\Rightarrow \boxed{H(e^{j\omega}) = 1 - e^{-j\omega} = 1 - \cos(\omega) + j \sin(\omega)}$$

- **RESPUESTA (continuación)**

$$|\,H(e^{j\omega})\,| = \sqrt{2(1-\cos(\omega))} \qquad \sphericalangle H(e^{j\omega}) = Atan\left(\frac{\sin(\omega)}{1-\cos(\omega)}\right)$$





1.- Respuesta en frecuencia de un sistema LIT

2.- La transformada de Fourier en tiempo discreto (DTFT)

3.- La serie de Fourier en tiempo discreto (DTFS)

4.- Las transformadas discreta (DFT) y rápida (FFT)

DTFT fórmula de síntesis

Toda secuencia discreta *x[n]* absolutamente sumable puede ser representada mediante una suma ponderada de infinitas exponenciales complejas infinitesimales:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\, e^{j\omega n}\, d\omega$$

donde la función de ponderación $X(e^{j\omega})$ se conoce como la transformada de Fourier en tiempo discreto (DTFT) de *x[n]*

DTFT fórmula de análisis

La función de ponderación $X(e^{j\omega})$ se construye mediante la proyección ortogonal* de la secuencia $x[n]$ sobre el espacio definido por las exponenciales complejas:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\omega n}$$

*** Sobre este asunto de la proyección volveremos con más detalle en el móduloVI**

$x[n]$ y $X(e^{j\omega})$ constituyen un par transformado único

Transformada directa

$$x[n] \longleftrightarrow X(e^{j\omega})$$

Transformada inversa

donde es importante destacar que $x[n]$ es una señal discreta en tiempo y $X(e^{j\omega})$ es una señal analógica.

• **VERIFICACIÓN DE LA DTFT**

Verifica que las ecuaciones de análisis y síntesis presentadas constituyen realmente un par transformado.

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\omega n}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\, e^{j\omega n}\, d\omega$$

• **RESPUESTA**

Reemplazando la ecuación de análisis en la de síntesis:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\, e^{-j\omega m} \right\} e^{j\omega n}\, d\omega$$

e intercambiando el orden de la sumatoria y la integral:

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(n-m)}\, d\omega \right\}$$

- **RESPUESTA (continuación)**

donde:

$$\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\,j\omega(n-m)} \, d\omega \right\} = sinc[n-m] = \delta[n-m]$$

con lo que finalmente se verifica la relación inversa entre las ecuaciones consideradas:

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \; \delta[n-m] = x[n]$$

La señal $X(e^{j\omega})$ también se conoce como espectro de frecuencias, ó simplemente espectro, de la secuencia $x[n]$.

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|\, e^{j \measuredangle X(e^{j\omega})}$$

$|X(e^{j\omega})|$ se denomina el espectro de amplitud ó magnitud,

y $\measuredangle X(e^{j\omega})$ se denomina el espectro de fase.

$X(e^{j\omega})$* es por definición una función periódica con período *2π

$$X(e^{j(\omega+2\pi k)}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j(\omega+2\pi k)n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\omega n}\, e^{-j2\pi k n} = X(e^{j\omega})$$

- **Frecuencias mínimas: $\omega = 2m\pi$ con *m* entero**
- **Frecuencias máximas: $\omega = (2m+1)\pi$ con *m* entero**

¿ Recuerdas la definición de la respuesta en frecuencia de un sistema lineal e invariante en tiempo ?

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, e^{-j\omega k}$$

¡ No es más que la DTFT de su respuesta impulsiva *h[n]* !!!

- **Secuencia conjugada simétrica (simetría hermiciana):**

$$x[n] = x^*[-n] \Rightarrow Re\{x[n]\}+j\, Im\{x[n]\} = Re\{x[-n]\} -j\, Im\{x[-n]\}$$

- **Secuencia conjugada antisimétrica:**

$$x[n] = -x^*[-n] \Rightarrow Re\{x[n]\}+j\, Im\{x[n]\} = -Re\{x[-n]\}+j\, Im\{x[-n]\}$$

- **Descomposición de una secuencia $x[n]$ en partes conjugadas, simétrica $x_s[n]$ y antisimétrica $x_a[n]$:** $x[n] = x_s[n] + x_a[n]$

donde $x_s[n] = ½\,(x[n] + x^*[-n])$ **y** $x_a[n] = ½\,(x[n] - x^*[-n])$

Propiedades de simetría de la DTFT

Dado el par transformado $x[n] \longleftrightarrow X(e^{j\omega})$

se puede demostrar que:

$$x^*[n] \longleftrightarrow X^*(e^{-j\omega})$$

$$x^*[-n] \longleftrightarrow X^*(e^{j\omega})$$

$$Re\{x[n]\} \longleftrightarrow X_s(e^{j\omega})$$

$$j\,Im\{x[n]\} \longleftrightarrow X_a(e^{j\omega})$$

$$x_s[n] \longleftrightarrow Re\{X(e^{j\omega})\}$$

$$x_a[n] \longleftrightarrow j\,Im\{X(e^{j\omega})\}$$

DTFT de secuencias reales

Dado el par transformado $x[n] \longleftrightarrow X(e^{j\omega})$

si $x[n]$ **es una secuencia real, se puede demostrar que:**

$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$ **: Simetría hermiciana**

$Re\{X(e^{j\omega})\} = Re\{X(e^{-j\omega})\}$ **: Simetría par**

$Im\{X(e^{j\omega})\} = -Im\{X(e^{-j\omega})\}$ **: Simetría impar**

$|X(e^{j\omega})| = |X(e^{-j\omega})|$ **: Simetría par**

$\measuredangle X(e^{j\omega}) = -\measuredangle X(e^{-j\omega})$ **: Simetría impar**

Dados los pares transformados:

$$x[n] \longleftrightarrow X(e^{j\omega})$$

$$y[n] \longleftrightarrow Y(e^{j\omega})$$

Entonces se cumple que:

$$A\,x[n] + B\,y[n] \longleftrightarrow A\,X(e^{j\omega}) + B\,Y(e^{j\omega})$$

Dado el par transformado:

$$x[n] \longleftrightarrow X(e^{j\omega})$$

Entonces se cumple que:

$$x[n-k] \longleftrightarrow e^{-j\omega k} X(e^{j\omega})$$

$$e^{j\lambda n} x[n] \longleftrightarrow X(e^{j(\omega-\lambda)})$$

¡ La transformada de Fourier no es invariante en tiempo !

Dado el par transformado:

$$x[n] \longleftrightarrow X(e^{j\omega})$$

Entonces se cumple que:

$$x[-n\,] \longleftrightarrow X(e^{-j\omega})$$

y si $x[n]$ es real, entonces se cumple que $X(e^{-j\omega}) = X^*(e^{j\omega})$

Dado el par transformado:

$$x[n] \longleftrightarrow X(e^{j\omega})$$

Entonces se cumple que:

$$x[n+k] - x[n-k] \longleftrightarrow 2\,j\,\sin(\omega k)\,X(e^{j\omega})$$

Dado el par transformado:

$$x[n] \longleftrightarrow X(e^{j\omega})$$

Entonces se cumple que:

$$(-jn)^k\, x[n] \longleftrightarrow \frac{d^k\, X(e^{j\omega})}{d\omega^k}$$

Dados los pares transformados:

$$x[n] \longleftrightarrow X(e^{j\omega})$$

$$y[n] \longleftrightarrow Y(e^{j\omega})$$

Entonces se cumple que:

$$x[n] * y[n] \longleftrightarrow X(e^{j\omega})\, Y(e^{j\omega})$$

Dados los pares transformados:

$$x[n] \longleftrightarrow X(e^{j\omega})$$

$$y[n] \longleftrightarrow Y(e^{j\omega})$$

Entonces se cumple que:

$$x[n]\, y[n] \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\lambda})\, Y(e^{j(\omega-\lambda)})\, d\lambda$$

Dado el par transformado:

$$x[n] \longleftrightarrow X(e^{j\omega})$$

Entonces se cumple que:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 \, d\omega$$

¡ La DTFT es una transformación que preserva la energía !

- **DEMOSTRACIÓN**

Demuestra el Teorema de Parseval

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 \, d\omega$$

- **RESPUESTA**

Sabiendo que:

$$x[n] \longleftrightarrow X(e^{j\omega})$$

$$x^*[-n] \longleftrightarrow X^*(e^{j\omega})$$

y utilizando el teorema de convolución:

$$x[n] * x^*[-n] \longleftrightarrow X(e^{j\omega})\, X^*(e^{j\omega})$$

podemos escribir el siguiente par transformado:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, x^*[n+k] \longleftrightarrow |\, X(e^{j\omega})\, |^2$$

- **RESPUESTA (continuación)**

De acuerdo con la fórmula de síntesis de la DTFT:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, x^*[n+k] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\, X(e^{j\omega})\,|^2\, e^{j\omega n}\, d\omega$$

Y finalmente, evaluando en *n = 0*:

$$\boxed{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\, x[k]\,|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\, X(e^{j\omega})\,|^2\, d\omega}$$

Dados los pares transformados:

$$x[n] \longleftrightarrow X(e^{j\omega})$$

$$y[n] \longleftrightarrow Y(e^{j\omega})$$

Entonces se cumple que:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, y^*[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\, Y^*(e^{j\omega})\, d\omega$$

Pares transformados de interés

$$x[n] = \delta[n] \quad \longleftrightarrow \quad X(e^{j\omega}) = 1$$

$$x[n] = 1 \quad \longleftrightarrow \quad X(e^{j\omega}) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega + 2\pi k)$$

$$x[n] = \alpha^n u[n] \ (|\alpha|<1) \quad \longleftrightarrow \quad X(e^{j\omega}) = (1-\alpha e^{-j\omega})^{-1}$$

$$x[n] = u[n] \quad \longleftrightarrow \quad X(e^{j\omega}) = (1-e^{-j\omega})^{-1} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega+2\pi k)$$

$$x[n] = e^{j\lambda n} \quad \longleftrightarrow \quad X(e^{j\omega}) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \lambda + 2\pi k)$$

Más pares transformados de interés

$$x[n] = u[n+M]\, u[M-n] \longleftrightarrow X(e^{j\omega}) = \frac{\sin(\omega(2M+1)/2)}{\sin(\omega/2)}$$

$$x[n] = \frac{\sin(\lambda n)}{\pi n} \;\; (0<\lambda<\pi) \longleftrightarrow X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [u(\omega+\lambda)\, u(\lambda-\omega)] * \delta(\omega+2\pi k)$$

$$x[n] = \cos(\lambda n+\phi) \longleftrightarrow X(e^{j\omega}) = \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} [e^{j\phi}\, \delta(\omega-\lambda+2\pi k) + e^{-j\phi}\, \delta(\omega+\lambda+2\pi k)]$$

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-kN] \longleftrightarrow X(e^{j\omega}) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k/N)$$

- **CÁLCULO DE UNA DTFT**

Halla la DTFT de la secuencia pulso rectangular

$$P_a[n] = u[n] - u[n-a]$$

- **RESPUESTA**

Partiendo de: $u[n+M]\, u[M-n] \longleftrightarrow \dfrac{\sin(\omega(2M+1)/2)}{\sin(\omega/2)}$

y aplicando un retardo de *M* muestras

$u[n]\, u[2M-n] \longleftrightarrow e^{-j\omega M} \sin(\omega(2M+1)/2) / \sin(\omega/2)$

donde $u[n]\, u[2M-n] = u[n] - u[n-2M-1] = P_{2M+1}[n]$

Finalmente, haciendo $2M+1 = a \Longrightarrow M = (a-1)/2$

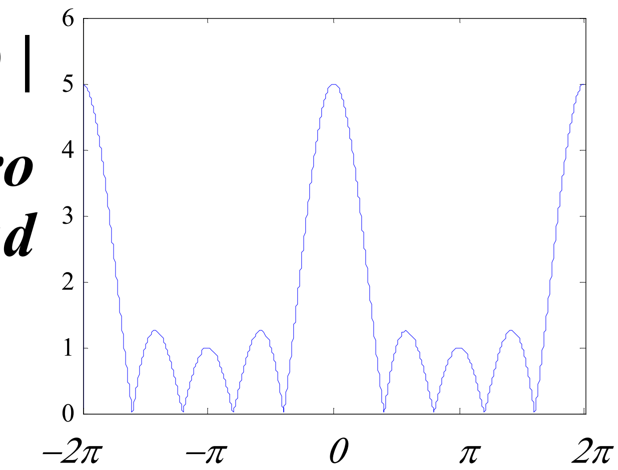
$$\boxed{DTFT\{P_a[n]\} = e^{-j\omega(a-1)/2}\, \frac{\sin(\omega a/2)}{\sin(\omega/2)}}$$

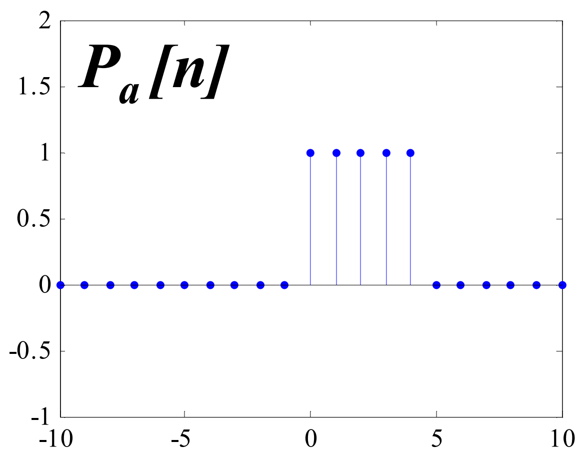
• RESPUESTA (continuación)

Ejemplo: $a = 5$

$|P_a(e^{j\omega})|$

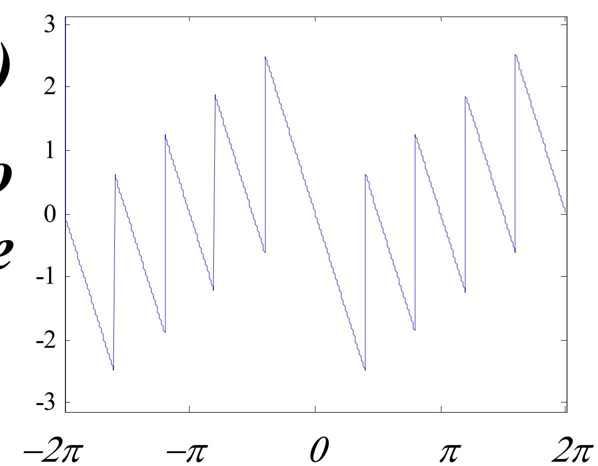
Espectro de amplitud





$\measuredangle P_a(e^{j\omega})$

Espectro de fase



1.- Respuesta en frecuencia de un sistema LIT

2.- La transformada de Fourier en tiempo discreto (DTFT)

3.- La serie de Fourier en tiempo discreto (DTFS)

4.- Las transformadas discreta (DFT) y rápida (FFT)

DTFS fórmula de síntesis

Toda secuencia discreta periódica *x[n]* con período *N*, puede ser representada mediante una suma ponderada de *N* exponenciales complejas de la forma:

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k]\, e^{j2\pi n k/N}$$

donde la secuencia de ponderación *X[k]* se conoce como la serie de Fourier en tiempo discreto (DTFS) de *x[n]*

La secuencia de ponderación *X[k]* constituye realmente una versión muestreada* de la DTFT de la secuencia *x[n]* y se puede calcular de la siguiente manera:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j2\pi n k/N}$$

*** Sobre este asunto del muestreo volveremos con más detalle en el móduloVI**

$x[n]$ y $X[k]$ constituyen un par transformado único

Transformada directa

$$x[n] \longleftrightarrow X[k]$$

Transformada inversa

donde es importante destacar que tanto $x[n]$ como $X[k]$ son señales periódicas discretas en variable.

Las fórmulas de análisis y síntesis de la DTFS suelen expresarse de la siguiente forma:

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n]\, W_N^{kn} \qquad \tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k]\, W_N^{-kn}$$

donde:

- **El operador complejo W_N se define como $e^{-j2\pi/N}$**
- **Las ~ se incluyen para enfatizar el carácter periódico de las secuencias *x[n]* y *X[k]***

Propiedad de ortogonalidad del operador W_N

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} W_N^{-kn} = \begin{Bmatrix} 1, & si\ n = mN \\ 0, & si\ n \neq mN \end{Bmatrix} = \sum_{m=0}^{N-1} \delta[n-mN]$$

Propiedades de simetría de la DTFS

Dado el par transformado $\tilde{x}[n] \longleftrightarrow \tilde{X}[k]$

se puede demostrar que:

$$\tilde{x}^*[n] \longleftrightarrow \tilde{X}^*[-k]$$

$$\tilde{x}^*[-n] \longleftrightarrow \tilde{X}^*[k]$$

$$Re\{\tilde{x}[n]\} \longleftrightarrow \tilde{X}_s[k]$$

$$j\, Im\{\tilde{x}[n]\} \longleftrightarrow \tilde{X}_a[k]$$

$$\tilde{x}_s[n] \longleftrightarrow Re\{\tilde{X}[k]\}$$

$$\tilde{x}_a[n] \longleftrightarrow j\, Im\{\tilde{X}[k]\}$$

DTFS de secuencias reales

Dado el par transformado $\tilde{x}[n] \longleftrightarrow \tilde{X}[k]$

si $\tilde{x}[n]$ **es una secuencia real, se puede demostrar que:**

$\tilde{X}[k] = \tilde{X}^*[-k]$ **: Simetría hermiciana**

$Re\{\tilde{X}[k]\} = Re\{\tilde{X}[-k]\}$ **: Simetría par**

$Im\{\tilde{X}[k]\} = -Im\{\tilde{X}[-k]\}$ **: Simetría impar**

$|\tilde{X}[k]| = |\tilde{X}[-k]|$ **: Simetría par**

$\sphericalangle\tilde{X}[k] = -\sphericalangle\tilde{X}[-k]$ **: Simetría impar**

Dados los pares transformados:

$$\tilde{x}[n] \longleftrightarrow \tilde{X}[k]$$
$$\tilde{y}[n] \longleftrightarrow \tilde{Y}[k]$$

Entonces se cumple que:

$$A\,\tilde{x}[n] + B\,\tilde{y}[n] \longleftrightarrow A\,\tilde{X}[k] + B\,\tilde{Y}[k]$$

Dado el par transformado:

$$\tilde{x}[n] \longleftrightarrow \tilde{X}[k]$$

Entonces se cumple que:

$$\tilde{X}[n] \longleftrightarrow N\,\tilde{x}[-k]$$

Dado el par transformado:

$$\tilde{x}[n] \longleftrightarrow \tilde{X}[k]$$

Entonces se cumple que:

$$\tilde{x}[n-m] \longleftrightarrow W_N^{mk}\,\tilde{X}[k]$$

$$W_N^{-\lambda n}\,\tilde{x}[n] \longleftrightarrow \tilde{X}[k-\lambda]$$

Dados los pares transformados:

$$\tilde{x}[n] \longleftrightarrow \tilde{X}[k]$$

$$\tilde{y}[n] \longleftrightarrow \tilde{Y}[k]$$

Entonces se cumple que:

$$\sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}[m]\,\tilde{y}[n-m] \longleftrightarrow \tilde{X}[k]\,\tilde{Y}[k]$$

Convolución Periódica

Dados los pares transformados:

$$\tilde{x}[n] \longleftrightarrow \tilde{X}[k]$$

$$\tilde{y}[n] \longleftrightarrow \tilde{Y}[k]$$

Entonces se cumple que:

$$\tilde{x}[n]\,\tilde{y}[n] \longleftrightarrow \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} \tilde{X}[i]\,\tilde{Y}[k-i]$$

Convolución Periódica

$$\tilde{x}[n] = 1 \quad \longleftrightarrow \quad \tilde{X}[k] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} N\delta[k-mN]$$

$$\tilde{x}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta[n-mN] \quad \longleftrightarrow \quad \tilde{X}[k] = 1$$

$$\tilde{x}[n] = e^{j2\pi np/N} \quad \longleftrightarrow \quad \tilde{X}[k] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} N\delta[k-p-mN]$$

Más pares transformados de interés

$$\tilde{x}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} P_{2M+1}[n+M-mN] \longleftrightarrow \tilde{X}[k] = \frac{\sin(\pi(2M+1)k/N)}{\sin(\pi k/N)}$$

$$\tilde{x}[n] = \cos(2\pi p n/N) \longleftrightarrow \tilde{X}[k] = N/2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta[k+p-mN]+\delta[k-p-mN]$$

$$\tilde{x}[n] = \sin(2\pi p n/N) \longleftrightarrow \tilde{X}[k] = N/(2j) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta[k+p-mN]-\delta[k-p-mN]$$

- **CÁLCULO DE UNA DTFS**

Halla una expresión analítica para la serie de Fourier en tiempo discreto de la siguiente secuencia:

$$\tilde{x}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (\delta[n-2m] - \delta[n-2m+1])$$

- **RESPUESTA**

De la expresión de $\tilde{x}[n]$ se desprende que $N=2$

Usando la fórmula de análisis de la DTFS

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{1} \tilde{x}[n]\, e^{-j\pi n k} = \sum_{n=0}^{1} (\delta[n] - \delta[n-1])\, e^{-j\pi n k}$$

de donde finalmente se obtiene que:

$$\tilde{X}[k] = 1 - e^{-j\pi k} \Rightarrow \boxed{\tilde{X}[k] = 1 - (-1)^k}$$

En resumen, existen cuatro representaciones de Fourier

TIPO DE SEÑAL	Continua en tiempo	Discreta en tiempo
Periódica	Serie en tiempo continuo (CTFS)	Serie en tiempo discreto (DTFS)
No periódica	Transformada en tiempo continuo (CTFT)	Transformada en tiempo discreto (DTFT)

1.- Respuesta en frecuencia de un sistema LIT

2.- La transformada de Fourier en tiempo discreto (DTFT)

3.- La serie de Fourier en tiempo discreto (DTFS)

4.- Las transformadas discreta (DFT) y rápida (FFT)

Considera una secuencia periódica $\tilde{x}[n]$ con período N, esta puede ser representada de la siguiente forma:

$$\tilde{x}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n] * \delta[n-mN]$$

donde la secuencia $x[n]$ de duración finita se define como:

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n], & \text{para } 0 \leq n < N \\ 0, & \text{para el resto} \end{cases}$$

De forma que la DFTS de $\tilde{x}[n]$ se puede calcular también a partir de $x[n]$:

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n]\, W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, W_N^{kn}$$

Y en forma totalmente análoga:

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k]\, W_N^{-kn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k]\, W_N^{-kn}$$

De esta forma, se define la transformada discreta de Fourier (DFT) de una secuencia finita *x[n]* de duración *N*, como:

$$X[k] = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, W_N^{kn}, & para \;\; 0 \leq k < N \\ 0, & para \;\; el\ resto \end{cases}$$

Cuya transformada inversa, o fórmula de síntesis, está dada por:

$$x[n] = \begin{cases} \dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\, W_N^{-kn}, & para \;\; 0 \leq n < N \\ 0, & para \;\; el\ resto \end{cases}$$

CUIDADO !!!

La DTF es en realidad un artificio matemático mediante el cual se usa la DTFS para representar secuencias de duración finita. En la realidad lo que se está manipulando son las versiones periódicas de dichas secuencias finitas.

Aprovechando las propiedades del operador W_N^{kn}

- **Simetría:** $W_N^{kn} = (W_N^{kn})^*$
- **Periodicidad:** $W_N^{kn} = W_N^{k(n+N)} = W_N^{n(k+N)}$

se pueden diseñar algoritmos de cómputo muy eficientes para la DFT. Estos algoritmos se denominan transformadas rápidas de Fourier (FFT).

El estudio de estos métodos no está dentro de los objetivos de este curso.

De acuerdo con el teorema de convolución, la convolución entre dos secuencias *x[n]* y *y[n]* puede calcularse como:

$$x[n] * y[n] = IFFT\{\, FFT\{x[n]\}\; FFT\{y[n]\}\, \}$$

la cual constituye, desde el punto de vista computacional, una forma alternativa para el cálculo de la convolución; y que, como veremos ahora, es más eficiente !!!

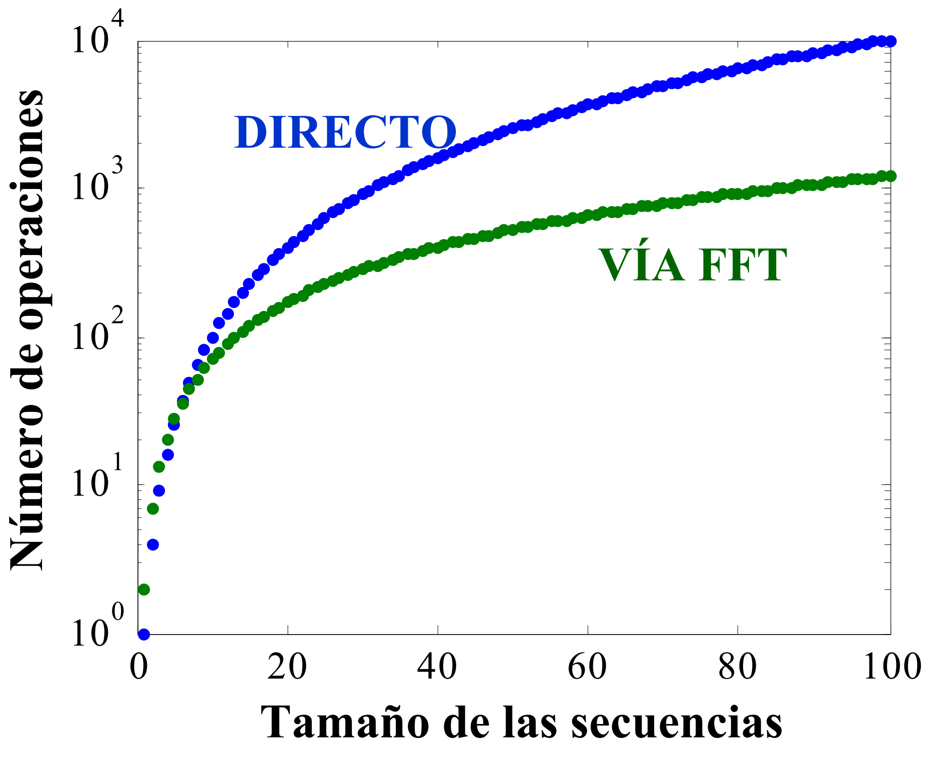
Eficiencia computacional de la FFT

El costo computacional de la convolución para dos secuencias de longitud N es de orden N^2 (hay que realizar N multiplicaciones N veces)

El costo computacional de la FFT de una secuencia de longitud N es de orden $(N/2)\ log_2 N$

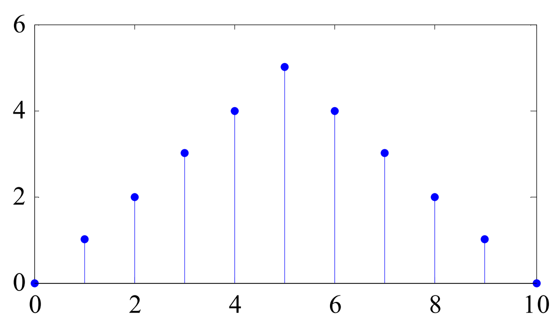
De forma que el costo computacional del cálculo de la convolución vía FFT es: $2\ (N/2)\ log_2 N + 2N + (N/2)\ log_2 N$

Comparación del costo computacional para el cálculo de la convolución:

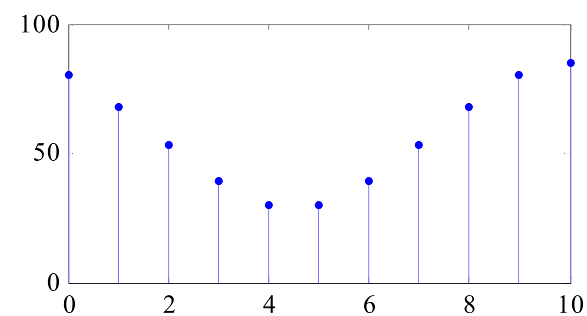


ATENCIÓN !!! Recuerda que la representación de la DFT asume que las secuencias son periódicas. Como consecuencia, el resultado de calcular la convolución vía FFT es en realidad una convolución periódica.

$x[n]$

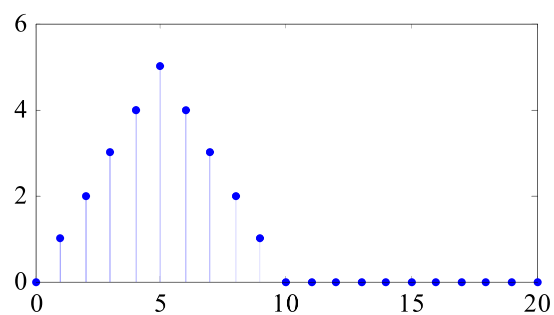


$x[n] \circledast x[n]$

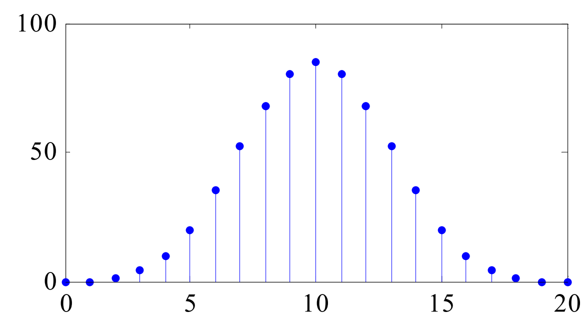


Para calcular correctamente una convolución vía FFT se deben añadir ceros al final de cada una de las secuencias involucradas, hasta completar la longitud de la convolución resultante.

x[n]



x[n] ∗ x[n]



Fin del Módulo II

Transformada y Serie de Fourier en Tiempo Discreto